

# Revista Virtuală Info MateTehnic

Revista virtuală de cultură tehnică, matematică și informatică pentru elevi, studenți, maiștri și profesori din învățământul preuniversitar și universitar



**Anul III      Nr. 10-11-12 /2014**

[www.infomate.ro](http://www.infomate.ro)

ISSN      2069-7988

ISSN-L    2069-7988

## Probleme propuse spre rezolvare

## Solution by Mathematical Reflections and Mathematical Excalibu

Nicusor Zlota

O100

Let  $a, b, c, d > 0$  such that  $a + b + c + d > 1$ . Prove that  
 $2^a + 3^b + 5^c + 7^d < 2a + 3b + 5c + 7d$

O101

Solve the equation :

$$\log_{a^2 x} ax^2 + \log_{a^3 x} ax^3 = 2, a > 1$$

Solution

We need  $x > 0$ . Setting then  $y = \log_a x$ , equation becomes  $(y - 1)(3y + 7) = 0$

Hence the two solutions  $\boxed{x \in \left\{ a, a^{-\frac{7}{3}} \right\}}$

O102

Solve the equation

$$\sqrt{x - 178} + \sqrt{2014 - x - y} = \sqrt{2013}$$

O103

Solve the equation  $5x^2 + y^2 = 3^n$  for integer  $n \geq 2$ .

O106

Let  $x, y, z > 0$  such that  $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$ . Prove that

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{1}{3}$$

O107

Let  $a, b, c, x, y, z > 0$  such that  $b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$ , find min  
 $f(x, y, z) = abc - bcx - cay - abz$

Solution Mathematical Reflections MR3/2014

J301

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

We have :

$$ab \geq \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{1}{a} + 3 \frac{1}{\sqrt[3]{ab}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right) + \frac{1}{b}$$

using the assumption, we

$$ab \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 3 \geq \frac{1}{a} + 3 \frac{1}{\sqrt[3]{ab}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right) + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 3 \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{ab}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right) \Rightarrow$$

$$ab \geq \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3$$

J304

. Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

Analyzing the enounce we see that we have a problem of extremum with conditions defined by the function :  $f(a, b, c) = a + \sqrt{b} + \sqrt[3]{c}$

, and the link :  $F(a, b, c) = a + b + c - 1 = 0$

We shall find the extremum points of the function  $f(a, b, c)$  with the link  $F(a, b, c) = 0$ ., considering the Lagrange function

$$L(a, b, c, \lambda) = f(a, b, c) + \lambda F(a, b, c),$$

and calculating their stationary points.

In these points the partial derivatives of the first order of the function L must be zero:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 1 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{1}{2\sqrt{b}} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} + \lambda = 0$$

$$a + b + c = 1$$

This system has the solution :  $\lambda = -1, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{3\sqrt{3}}, a = \frac{3}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\alpha_0 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -1)$ , which is the stationary point of the function L.

It follows that the function f has the stationary point with conditions :

$A(\frac{3}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3\sqrt{3}})$ , corresponding to the Lagrange multiplier  $\lambda = -1$

The differential of second order of the Lagrange function in an arbitrary point of the domain of definition is :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial b^2} = -\frac{1}{4b\sqrt{b}}, \frac{\partial^2 L}{\partial c^2} = -\frac{2}{9c\sqrt[3]{c^2}}, \frac{\partial^2 L}{\partial a\partial b} = \frac{\partial^2 L}{\partial b\partial c} = \frac{\partial^2 L}{\partial c\partial a} = 0$$

$$d^2L = 0da^2 - \frac{1}{4b\sqrt{b}}db^2 - \frac{2}{9c\sqrt[3]{c^2}}dc^2 \quad (1)$$

But, by differentiating the link it follows :  $da + db + dc = 0$ , we get  $dc = -db - da$  and replacing in (1), we obtain :

The hessian of this differential is :

$H_L(\alpha_0)$ , and has the principal minors  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$

, so that, by the Sylvester criterion  $d^2L(\alpha_0)$  is a negatively definite quadratic form.

The preceding results prove that  $A(\frac{3}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3\sqrt{3}})$  is a point of maximum with conditions of the function f; therefore we have :

$$f(a, b, c) \leq f(\frac{3}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3\sqrt{3}}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}} = M_1$$

Similarly, we have

$$g(a, b, c) = a + \sqrt{b + \sqrt[3]{c}}, F(a, b, c) = a + b + c - 1 = 0$$

$$L_1(a, b, c) = g(a, b, c) + \lambda F(a, b, c)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial a} = 1 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial b} = \frac{1}{2\sqrt{b + \sqrt[3]{c}}} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial c} = \frac{1}{6\sqrt[3]{c^2}} \frac{1}{\sqrt{b + \sqrt[3]{c}}} + \lambda = 0$$

$$a + b + c = 1$$

$$\lambda = -1, a = \frac{3}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}}, b = \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}, c = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\beta_0 = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -1\right), B\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$g(a, b, c) \leq g\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}} = M_2$$

So, in conclusion we  $M_1 = M_2$

S301

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

We denote by

$$\frac{b}{a} = x, \quad a \neq 0$$

$$\frac{c}{a} = y$$

, then the inequality becomes :  $(1 + x + y)(x + xy + y)(1 + x^3 + y^3) \leq (1 + x^2 + y^2)^3$

Let  $x + y = s, xy = p$ , then we  $(1 + s^2 - 2p)^3 \geq (1 + s)(s + p)(1 + s^3 - 3ps)$

Consider the function  $f : \left[0, \frac{s^2}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(p) = (1 + s^2 - 2p)^3 - (1 + s)(s + p)(1 + s^3 - 3ps)$

1) we show that :  $f(0) = (1 + s^2)^3 - (1 + s)(s)(1 + s^3) = s^6 - s^5 + 2s^4 + 2s^2 - s + 1 \geq 0$

Calculate  $f'(0) = 6s^5 - 5s^4 + 8s^3 + 4s - 1; f''(0) = 30s^4 - 20s^3 + 24s^2 + 4 \geq 0$   
 $f'''(0) = 120s^3 - 60s^2 + 48s = 12s(10s^2 - 5s + 4) \geq 0$

, true for any  $s \geq 0$

2) Calculate :

$$f\left(\frac{s^2}{4}\right) = \left(1 + s^2 - \frac{s^2}{2}\right)^3 - (1+s)\left(s + \frac{s^2}{4}\right)\left(1 + s^3 - 3s\frac{s^2}{4}\right) = \frac{1}{16}(s^6 - 5s^5 + 8s^4 - 4s^3 + 4s^2 - 16s + 16) = \frac{(s-2)^2(s^4 - s^3 + 4)}{16} \geq 0,$$

, true for any  $s \geq 0$

S302

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

1) Let  $c = \max\{a, b, c\}$ , we show that :  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} > \sqrt[3]{c}, x \in [0, 1]$

Consider the function  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x$ , Is decreasing, so  $f(x) > f(1)$ ,

$x \in [0, 1]$ . But  $f(1) = \frac{a+b}{c}$ , we have  $f(x) > 1$ , for any  $x \in [0, 1]$ , result

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} > \sqrt[3]{c}, x \in [0, 1]$ , . For  $x = \frac{1}{2}$ , obtain  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$

2) Cosine theorem in the triangle  $A'B'C'$ , we get

$$\cos A' = \frac{b+c-a}{2\sqrt{bc}}, \cos B' = \frac{c+a-b}{2\sqrt{ac}}, \cos C' = \frac{a+b-c}{2\sqrt{ab}}$$

$$\cos A' \cos B' \cos C' = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{8abc} = \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{8abc} =$$

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \prod \sin \frac{A}{2},$$

, where  $2p=a+b+c$

U301

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

Applying Jensen's inequality to the convex function  $f(t) = \frac{1}{t}, t > 0$ , we have :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{y}{4}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{z}{6}\right) + \frac{1}{12}f\left(\frac{t}{12}\right) \geq f\left(\frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{12}t}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}\right) =$$

$$\frac{144}{36x+9y+4z+t} \geq \frac{144}{32x+6y+2z+x+(x+y)+(x+y+z)+(x+y+z+t)} = \frac{144}{32x+6y+2z+44} \geq \frac{144}{32(2)+6(4)+2(6)+44} = 1$$

U305

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

Let  $(x_n)_{n \geq 1}$  be a sequence  $x_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ , which is strictly increasing, so  $(x_n)_{n \geq 1}$  has limited.

If  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l, l \in R$ , then :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} - x_n) = 0, (1)$

But

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{a_{2n}} \geq \frac{n^2}{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}} > \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}} > \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

, which contradicts (1). Remains  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

Solution by MR4/2014

J312

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

From the AM-GM inequality, we have

$$\frac{a(b^2+3)}{3c^2+1} + \frac{b(c^2+3)}{3a^2+1} + \frac{c(a^2+3)}{3b^2+1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc\prod(a^2+3)}{\prod(3a^2+1)}}$$

We shall prove that :

$$\sqrt[3]{\frac{abc\prod(a^2+3)}{\prod(3a^2+1)}} \geq 1 \Leftrightarrow a(a^2+3)b(b^2+3)c(c^2+3) \geq (3a^2+1)(3b^2+1)(3c^2+1), (*)$$

We have

$$a(a^2+3) \geq 3a^2+1 \Leftrightarrow (a-1)^3 \geq 0$$

$$b(b^2+3) \geq 3b^2+1 \Leftrightarrow (b-1)^3 \geq 0$$

$$c(c^2+3) \geq 3c^2+1 \Leftrightarrow (c-1)^3 \geq 0$$

Multiplying, we obtain the inequality (\*)

O307

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

We see that :

$$\left(\frac{1}{a+3}, \frac{1}{b+3}, \frac{1}{c+3}, \frac{1}{d+3}\right), (a+3, b+3, c+3, d+3), \text{ are in the reverse order.}$$

From the Chebyshef inequality, we have:

$$(a+3+b+3+c+3+d+3)\left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} + \frac{1}{d+3}\right) \leq 4\left((a+3)\frac{1}{a+3} + (b+3)\frac{1}{b+3} + (c+3)\frac{1}{c+3} + (d+3)\frac{1}{d+3}\right) \Leftrightarrow$$



$$(12 + \sum a) \left( \sum \frac{1}{a+3} \right) \leq 16 \Rightarrow \sum \frac{1}{a+3} \leq 1$$

It suffices to prove that :  $1 \leq \frac{1}{abcd} \Rightarrow abcd \leq 1$

By the means inequality it follows that

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd} \Rightarrow abcd \leq 1, \text{ which is obvious.}$$

O310

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

In triangle ABC we use the notations: BC=a, AC=b, AB=c

$m = \frac{BX}{BC}, n = \frac{CY}{CA}, p = \frac{AZ}{AB}$ , where  $m, n, p \in (0,1)$  and from the Ceva's theorem, we deduce :

$$\frac{m}{1-m} \frac{n}{1-n} \frac{p}{1-p} = 1 \Rightarrow mnp = (1-m)(1-n)(1-p), (*)$$

In triangle CXY, from the theorem of cosinuses, we get :

$$\Delta CXY \Rightarrow XY^2 = CX^2 + CY^2 - 2CXCY \cos C$$

$$\begin{aligned} XY^2 &= a^2(1-m)^2 + b^2n^2 - 2ab(1-m)n \cos C \geq 2ab(1-m)n - 2ab(1-m)n \cos C \\ &= 2ab(1-m)n(1 - \cos C) \end{aligned}$$

Similarly, we have :

$$\Delta AYZ \Rightarrow YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2AYAZ \cos A$$

$$\begin{aligned} YZ^2 &= b^2(1-n)^2 + c^2p^2 - 2bc(1-n)p \cos A \geq 2bc(1-n)p - 2bc(1-n)p \cos C \\ &= 2bc(1-n)p(1 - \cos A) \end{aligned}$$

$$\Delta BZX \Rightarrow ZX^2 = BZ^2 + BX^2 - 2BZBX \cos B$$

$$\begin{aligned} ZX^2 &= c^2(1-p)^2 + a^2m^2 - 2ac(1-p)m \cos A \geq 2ac(1-p)m - 2ac(1-p)m \cos A \\ &= 2ac(1-p)m(1 - \cos A) \end{aligned}$$

Using (\*) and the above relations, the inequality becomes

$$\frac{XB}{XY} \frac{YC}{YZ} \frac{ZA}{ZX} \leq \frac{R}{2r} \Leftrightarrow \frac{(mnp)^2 (abc)^2}{8(abc)^2(mnp)(1-m)(1-n)(1-p)(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)} \leq \frac{R^2}{4r^2} \Leftrightarrow$$

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) = 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{8(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{(abc)^2} = \frac{r^2}{2R^2}$$

S307

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

Take  $D \in BC$ , then in triangle ADB, we have successively :

$$\triangle ADB \Rightarrow AD = AB \sin B \Rightarrow a = 4c \sin B$$

From the theorem of sinuses we get :

$$\begin{aligned} \sin A = 4 \sin C \sin B &\Leftrightarrow \sin(240 - 2B) = 4 \sin(B - 60) \sin B \Leftrightarrow \\ 2 \sin(120 - B) \cos(120 - B) &= 4 \sin B \sin(60 - B) \Leftrightarrow \\ (\sqrt{3} \cos B + \sin B)(\sqrt{3} \sin B - \cos B) &= 4 \sin B (\sin B - \sqrt{3} \cos B) \Leftrightarrow \\ (\sqrt{3} - 4) \sin^2 B + (2 + 4\sqrt{3}) \sin B \cos B - \sqrt{3} \cos^2 B &= 0 \end{aligned}$$

Denoting  $\operatorname{tg} B = t$ , the equation becomes :

$$(\sqrt{3} - 4)t^2 + (2 + 4\sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow t = \sqrt{3} + 2, \text{ whence}$$

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{3} + 2 \Rightarrow \angle B = 75^\circ$$

S312

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

We shall prove that :  $\frac{1}{1-bcd} \leq \frac{1}{1-\frac{b^3+c^3+d^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{b^3+c^3+d^3}{3} \geq bcd$ , which is true.

Similarly, we have

$$\frac{1}{1-cda} \leq \frac{1}{1-\frac{c^3+d^3+a^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{c^3+d^3+a^3}{3} \geq cda$$

$$\frac{1}{1-dab} \leq \frac{1}{1-\frac{d^3+a^3+b^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{d^3+a^3+b^3}{3} \geq dab$$

$$\frac{1}{1-abc} \leq \frac{1}{1-\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$$

The inequality is equivalent with :

$$\sum \frac{1}{1-bcd} \leq \sum \frac{1}{1-\frac{b^3+c^3+d^3}{3}} = \sum \frac{3}{2+a^3} \leq \frac{16}{3}$$

We see that :  $(\frac{1}{a^3+2}, \frac{1}{b^3+2}, \frac{1}{c^3+2}, \frac{1}{d^3+2}), (a^3+2, b^3+2, c^3+2, d^3+2)$ , are in the reverse order.

From the Chebyshef's inequality, we have :

$$\begin{aligned} & (a^3+2+b^3+2+c^3+2+d^3+2) \left( \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} + \frac{1}{d^3+2} \right) \leq \\ & 4 \left( (a^3+2) \frac{1}{a^3+2} + (b^3+2) \frac{1}{b^3+2} + (c^3+2) \frac{1}{c^3+2} + (d^3+2) \frac{1}{d^3+2} \right) \Leftrightarrow \\ & (8 + \sum a^3) \left( \sum \frac{1}{a^3+2} \right) \leq 16 \Rightarrow \sum \frac{1}{a^3+2} \leq \frac{16}{9} \end{aligned}$$

Solution by Mathematical Excalibur 1/2014

**Problem 446.** If real numbers  $a$  and  $b$  satisfy  $3^a + 13^b = 17^a$  and  $5^a + 7^b = 11^b$ , then prove that  $a < b$ .

Solution by Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Romania

If  $a \geq b$ , then  $13^a \geq 13^b$  and  $5^a \geq 5^b$ .

Then the relation :  $3^a + 13^b = 17^a \Rightarrow 3^a + 13^a \geq 17^a$

Considering the function :  $f(a) = \left(\frac{3}{17}\right)^a + \left(\frac{13}{17}\right)^a$ , Which is strictly decreasing and from

$f(1) = \frac{16}{17} < 1$ , we obtain  $f(a) > 1 > f(1)$ , therefore  $a < 1$ .

The relation  $5^a + 7^b = 11^b \Rightarrow 5^b + 7^b \leq 11^b$

Proceeding as above with the function :  $g(b) = \left(\frac{5}{11}\right)^b + \left(\frac{7}{11}\right)^b$ , we obtain  $g(b) > 1$ , therefore  $b > 1 > a$

which contradicts  $a \geq b$ . It follows that  $a < b$

**Generalization :**

Let  $\alpha, \beta, \mu, \sigma \in (1, \infty)$  and  $x, y \in \mathbb{R}$  be real numbers such that  $\alpha^x + \beta^y = (\alpha + \beta + 1)^x$  and  $\mu^x + \sigma^y = (\mu + \sigma - 1)^y$ . Show that  $x < y$

**OLIMPIADA MATEMATICĂ DIN SINGAPORE PENTRU SENIORI 2014 (II)**

Soluții date de Corneliu Mănescu-Avram

**Răspuns scurt**

3 iunie 2014

11. Presupunem că  $x$  este un număr real astfel încât  $\frac{27 \times 9^x}{4^x} = \frac{3^x}{8^x}$ . Să se găsească valoarea  $2^{-(1+\log_2 3)x}$ .
12. Să se calculeze  $50(\cos 39^\circ \cos 21^\circ + \cos 129^\circ \cos 69^\circ)$ .
13. Presupunem că  $a$  și  $b$  sunt numere reale astfel încât polinomul  $x^3 + ax^2 + bx + 15$  se divide cu  $x^2 - 2$ . Să se determine valoarea  $a^2 b^2$ .
14. În triunghiul  $\Delta ABC$ ,  $D$  se află între  $A$  și  $C$  și  $AC = 3AD$ ,  $E$  se află între  $B$  și  $C$  și  $BC = 4EC$ .  $B$ ,  $G$ ,  $F$ ,  $D$  în această ordine sunt coliniare și  $BD = 5GF = 5FD$ . Presupunem că aria  $\Delta ABC$  este egală cu 900, să se determine aria triunghiului  $\Delta EFG$ .
15. Fie  $x, y$  numere reale astfel încât  $y = |x - 1|$ . Care este cea mai mică valoare a expresiei  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2$ ?
16. Să se calculeze suma  $\frac{3!+4!}{2(1!+2!)} + \frac{4!+5!}{3(2!+3!)} + \dots + \frac{12!+13!}{11(10!+11!)}$ .
17. Fie  $n$  un număr natural astfel încât  $12n^2 + 12n + 11$  este un număr de 4 cifre cu toate cifrele identice. Să se determine valoarea lui  $n$ .
18. În dezvoltarea  $(2 + 3x)^n$  coeficienții lui  $x^3$  și  $x^4$  sunt în raportul 8 : 15. Să se determine  $n$ .
19. În triunghiul  $\Delta ABC$  se știe că  $(\sin A + \sin B) : (\sin B + \sin C) : (\sin C + \sin A) = 9 : 10 : 11$ . Să se calculeze  $480 \cos A$ .
20. Se dă  $x = \sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$ . Să se calculeze  $\frac{x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 7x + 68}{x^2 - 10x + 19}$ .
21. Fie  $n$  un număr întreg și  $\Delta ABC$  un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în  $C$ . Se știe că  $\sin A$  și  $\sin B$  sunt soluții ale ecuației  $(5n + 8)x^2 - (7n - 20)x + 120 = 0$ . Să se determine  $n$ .
22. Fie  $S_1$  și  $S_2$  mulțimile de puncte din planul  $\mathbb{R}^2$  definite prin

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + |x|| + |y + |y|| \leq 2\},$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - |x|| + |y - |y|| \leq 2\}.$$

Să se calculeze aria intersecției lor.

23. Fie  $n$  un număr natural și  $x = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$ ,  $y = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$ . Se știe că  $14x^2 + 26xy + 14y^2 = 2014$ . Să se găsească valoarea lui  $n$ .

24. Să se găsească numărul soluțiilor întregi ale ecuației  $(x^2 - 5x + 5)^{x+5} = 1$ .

25. Să se găsească numărul perechilor  $(p, q)$  de numere întregi care sunt soluții ale ecuației  $p^2 - q^2 + p + q = 2014$ .

26. Dacă  $x$  este măsura în radiani a unui unghi să se determine valoarea maximă a expresiei  $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x}$  pentru  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{16}$ .

27. Să se determine numărul de moduri în care poate fi colorată o tablă  $10 \times 10$  folosind culorile alb și negru astfel încât fiecare pătrat  $2 \times 2$  să conțină două pătrate negre și două pătrate albe.

28. În triunghiul isoscel  $ABC$  cu  $AB = AC$ ,  $D$  și  $E$  sunt puncte pe  $AB$  și  $AC$  respectiv, astfel încât  $AD = CE$  și  $DE = BC$ . Presupunem că  $\angle AED = 18^\circ$ . Să se determine măsura în grade a unghiului  $\angle BDE$ .

29. Să se găsească numărul tripletelor ordonate  $(x, y, z)$  de numere reale care sunt soluții ale sistemului de ecuații  $x^2 = 4y - 4$ ,  $y^2 = 4z - 4$ ,  $z^2 = 4x - 4$ .

30. Fie  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  și  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Să se găsească numărul submulțimilor  $Y$  cu 4 elemente ale lui  $X$  astfel încât  $10 \in Y$  și intersecția lui  $Y$  cu  $A$  este nevidă.

31. Să se determine numărul de moduri în care 7 pasageri pot fi așezați în jurul unei mese rotunde cu 10 locuri fără a elimina locurile libere. Două așezări sunt considerate identice dacă se obțin una din cealaltă printr-o rotație.

32. Să se găsească valoarea maximă a expresiei  $\frac{8(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$  pentru orice  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

33. Să se calculeze  $2(\sin 2^\circ \operatorname{tg} 1^\circ + \sin 4^\circ \operatorname{tg} 1^\circ + \dots + \sin 178^\circ \operatorname{tg} 1^\circ)$ .

34. Fie  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  numere reale astfel încât  $|x_1| = 63$  și  $|x_{n+1}| = |x_n + 1|$  pentru  $n = 1, 2, \dots, 99$ . Să se determine cea mai mare valoare posibilă a expresiei  $(-x_1 - x_2 - \dots - x_{100})$ .

35. Două cercuri  $\Gamma_1, \Gamma_2$  se intersectează în punctele  $C$  și  $D$ . O dreaptă intersectează  $\Gamma_1$  în punctele  $A, Y$ , segmentul  $CD$  în  $Z$  și  $\Gamma_2$  în  $X, B$ , în ordinea  $A, X, Z, Y, B$ . Fie  $BW$  o tangentă comună la cele două cercuri, cu  $W$  pe  $\Gamma_1$ . Presupunem că  $ZX = ZY$  și  $AB \cdot AX = 100$ . Să se găsească valoarea lui  $BW$ .

Soluții. 11. Valoarea este egală cu 27. Din  $27 = \left(\frac{12}{72}\right)^x = 6^{-x}$ , deducem  $2^{-x \log_2 6} = 2^{\log_2 6^{-x}} = 6^{-x}$ .

12.  $50(\cos 39^\circ \cos 21^\circ + \cos 129^\circ \cos 69^\circ) = 50(\cos 39^\circ \cos 21^\circ + \cos (90^\circ + 39^\circ) \cos (90^\circ - 21^\circ)) = 50(\cos 39^\circ \cos 21^\circ - \sin 39^\circ \sin 21^\circ) = 50 \cos (39^\circ + 21^\circ) = 50 \cos 60^\circ = 25$ .

13. Scriem că polinomul are rădăcinile  $\pm \sqrt{2}$  și obținem  $a = -\frac{15}{2}, b = -2$ , deci  $a^2 b^2 = 225$ .

14. Din  $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$  se deduce  $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{1}{2}$ , astfel că  $S_{\Delta ABD} = 300$ . La fel,  $\frac{1}{3} S_{\Delta BGE} = S_{\Delta EFG} = S_{\Delta EFD}$ , de unde  $S_{\Delta DCE} + 5 S_{\Delta EFG} = 600$ . Dar  $S_{\Delta DCE} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} = 150$ , așadar  $S_{\Delta EFG} = \frac{600 - 150}{5} = 90$ .

15. Din  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 2$ , deducem că valoarea minimă este 2, pentru  $x = 0, y = 1$ .

16. Din  $\frac{(n+2)! + (n+3)!}{(n+1)(n! + (n+1)!)} = n + 4$ , deducem că suma este egală cu  $5 + 6 + \dots + 14 = 95$ .

17. Din  $111m = 12n^2 + 12n + 11$ , se deduce  $m \equiv 1 \pmod{4}$ , deci  $m \in \{1, 5, 9\}$ . La fel,  $m \equiv 2 \pmod{3}$ , de unde  $m = 5, n = 21$ .

18.  $n = 8$ . Termenul general este  $T_{k+1} = C_n^k 2^{n-k} (3x)^k$ . Din  $15C_n^3 2^{n-3} 3^3 = 8C_n^4 2^{n-4} 3^4$ , se deduce după simplificări,  $5 = n - 3$ .

19.  $a + b, b + c, c + a$  sunt direct proporționale cu 9, 10, 11, deci  $a, b, c$  sunt direct proporționale cu 5, 4, 6, așadar  $480 \cos A = 10(-5^2 + 4^2 + 6^2) = 270$ .

20. Din  $x = 5 - 2\sqrt{3}$ , se deduce  $(x - 5)^2 = 12$ , de unde  $x^2 - 10x = -13$ . Din  $x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 7x + 68 = (x^2 - 10x + 13)(x^2 + x + 2) + 42$ , rezultă că fracția este egală cu  $\frac{42}{19-13} = 7$ .

21. Din  $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$  și relațiile lui Viète  $\sin A + \sin B = \frac{7n-20}{5n+8}, \sin A \sin B = \frac{120}{5n+8}$ , se deduce  $1 = (\sin A + \sin B)^2 - 2 \sin A \sin B = \left(\frac{7n-20}{5n+8}\right)^2 - 2 \cdot \frac{120}{5n+8}$ , astfel că  $(7n - 20)^2 - 240 \cdot$

$(5n + 8) = (5n + 8)^2$ . După efectuarea calculelor se deduce  $n = -1$  sau  $n = 66$ . Prima soluție nu convine, deoarece unghiurile sunt în primul cadran, deci sinusurile lor sunt pozitive. Rezultă  $n = 66$ .

22. Cazul 1.  $x \geq 0, y \geq 0$ . Regiunea plană este mărginită de dreapta  $x + y = 1$  și axele de coordonate, adică este un triunghi dreptunghic cu aria egală cu  $\frac{1}{2}$ .

Cazul 2.  $x < 0, y \geq 0$ . Intersecția celor două mulțimi este pătratul cu laturile pe dreptele  $x = -1, y = 1$  și axele de coordonate, deci aria ei este egală cu 1.

Cazul 3.  $x < 0, y < 0$ . Regiunea plană este mărginită de dreapta  $x + y = -1$  și axele coordonate, adică este un triunghi dreptunghic cu aria egală cu  $\frac{1}{2}$ .

Cazul 4.  $x \geq 0, y < 0$ . Intersecția celor două mulțimi este pătratul cu laturile pe dreptele  $x = 1, y = -1$  și axele de coordonate, deci aria ei este egală cu 1.

Suma acestor arii este  $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 = 3$ .

23. Avem  $x + y = 2(n + 1), xy = 1$ , deci  $14x^2 + 26xy + 14y^2 = 14(x + y)^2 - 2xy = 14 \cdot 4(n + 1)^2 - 2 = 2014$ , de unde  $n = 5$ .

24. Cazul 1.  $x^2 - 5x + 5 = 1$ , de unde  $x \in \{1, 4\}$ . Cazul 2.  $x + 5 = 0$ , de unde  $x = -5$ .

Cazul 3.  $x^2 - 5x + 5 = -1$  și  $x + 5$  este par, de unde  $x = 3$ . Există 4 soluții.

25. Este adevărată descompunerea  $(p + q)(p - q + 1) = 2 \cdot 19 \cdot 53$ . Suma celor doi factori din stânga este un număr impar, deci factorii sunt de parități diferite. Produsul din dreapta se scrie ca produs de doi factori de parități diferite astfel:  $(2)(19 \cdot 53), (2 \cdot 19)(53), (2 \cdot 53)(19),$

$(2 \cdot 19 \cdot 53)(1)$ . Dacă se schimbă ordinea factorilor se obțin încă patru moduri de scriere, iar dacă se schimbă și semnele factorilor, atunci avem în total 16 variante de scriere. Rezultă că numărul soluțiilor ecuației din enunț este egal cu 16.

26. Din  $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x} = \frac{2 \sin 4x \cdot \cos 2x + \sin 4x}{2 \cos 4x \cdot \cos 2x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 4x$ , rezultă că valoarea maximă a funcției este  $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{16} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ .

27. Dacă nu există pătrate alăturate de aceeași culoare, atunci numărul de moduri de colorare este egal cu  $2^{10}$  (este suficient să alegem culorile pătratelor din prima linie, de exemplu, culorile celorlalte pătrate vor fi unic determinate). Dacă există în prima linie două pătrate alăturate de aceeași culoare, atunci culorile celorlalte pătrate sunt de asemenea unic determinate și se obțin  $2^{10} - 2$  moduri de colorare. Numărul total de moduri este deci  $2^{10} + 2^{10} - 2 = 2^{11} - 2$ .

28. Alegem un sistem cartezian de coordonate cu punctul  $A$  în partea pozitivă a axei  $Ox$  și  $B, C$  pe axa  $Oy$ . Considerând lungimea înălțimii din  $A$  ca unitate de măsură, avem  $A(1, 0), B(0, m), C(0, -m)$ , cu  $m > 0$ . Luăm  $D(d, m(1 - d)), E(e, m(e - 1))$ , cu  $0 < e < \frac{1}{2} <$

$< d < 1$  și folosim condițiile din enunț: din  $AD = CE$  deducem  $(d - 1)^2 + m^2(d - 1)^2 = e^2 + m^2e^2$ , așadar  $d - 1 = \pm e$ . Este convenabil numai semnul minus. Din  $DE = BC$ , rezultă  $(2d - 1)^2 + m^2 = 4m^2$ , de unde  $2d - 1 = m\sqrt{3}$  (este convenabil numai semnul  $+$ ). Coeficientul unghiular al dreptei  $DE$  este  $m' = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{m}{2d - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , astfel că dreapta  $DE$  face cu axa  $Ox$  (înălțimea din  $A$ ) un unghi de  $30^\circ$ . Din  $\angle AED = 18^\circ$ , rezultă simplu  $\angle A =$

$= 2(30^\circ - 18^\circ) = 24^\circ$  și  $\angle BDE = 18^\circ + 24^\circ = 42^\circ$  (unghi exterior).



29. Se adună ecuațiile și se obține  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$ , deci  $x = y = z = 2$ .

30. Se aleg pe rând câte 1, 2 sau 3 elemente din  $A$ , respectiv 2, 1 sau 0 elemente dintre cele rămase în  $X$ . Numărul submulțimilor  $Y$  este deci  $C_4^1 C_8^2 + C_4^2 C_7^1 + C_4^3 C_6^0 = 158$ .

31. Se etichetează musafirii cu numerele 1, ..., 7, se fixează musafirul 1, se aleg cele trei locuri libere din cele nouă rămase și se așază musafirii 2, ..., 7 pe 6 locuri. Numărul de moduri este egal cu  $C_9^3 P_6 = \frac{9!}{6}$  (sau putem folosi direct aranjamentele).

32. Dacă  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  și  $u = \sin t \cos t$ , atunci  $-\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}$  și  $\frac{8(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} = 8(1+2u)(1-u)$  are valoarea maximă pentru  $u = \frac{1}{4}$ . Valoarea maximă este  $f\left(\frac{1}{4}\right) = 9$ .

33.  $2\text{tg } 1^\circ (\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \dots + \sin 178^\circ) = 2\text{tg } 1^\circ \cdot \frac{\sin 90^\circ \sin 89^\circ}{\sin 1^\circ} = 2$ .

34. E clar că termenii de rang impar sunt impari, iar termenii de rang par sunt pari. Ridicăm la pătrat pentru a scăpa de module, adunăm cele 99 de egalități și obținem

$$x_{100}^2 = x_1^2 + 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{99}) + 99,$$

de unde  $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = \frac{(x_{100} + 1)^2 - 63^2 - 100}{2}$ , care este minimă pentru  $x_{100} = 0$  sau  $x_{100} =$

$= -2$ , iar valoarea minimă este  $-2034$ . Rezultă că valoarea maximă căutată este 2034.

35. Punctul  $Z$  aparține axei radicale a celor două cercuri, deci are puteri egale:  $ZB \cdot ZX = ZA \cdot ZY$ , de unde  $ZB = ZA$ . Avem  $100 = AB \cdot AX = AB(ZA - ZX) = AB(ZB - ZY) = AB \cdot BY$ , care este puterea lui  $B$  față de  $\Gamma_1$ . Se deduce  $100 = AB \cdot BY = BW^2$ , deci  $BW = 10$ .

## Bibliografie

[www.mathlinks.ro](http://www.mathlinks.ro)

## MATEMATICA GPS

CORNELIU MĂNESCU-AVRAM

GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

Matematica este omniprezentă în dezvoltarea tehnologiei, iar rezolvarea unei probleme din viața reală se face de obicei prin utilizarea unor cunoștințe matematice. Unul dintre cele mai bune exemple de aplicație a matematicii în practică este dat de următoarea problemă simplă : cum poate fi localizat un obiect pe suprafața Pământului?

Pentru rezolvarea aceste probleme au fost utilizate diverse instrumente, precum compasul magnetic, astrolabul, sextantul. În prezent sunt folosite metode și tehnologii mai avansate, cum ar fi Sistemul Global de Poziționare (GPS). Sistemul GPS a fost completat în 1995 de către Departamentul Apărării al SUA și a fost autorizat pentru aplicații civile. El era compus inițial din 24 de sateliți, dintre care cel puțin 21 erau funcționali 98% din timp. În 2005 el a fost extins la 32 de sateliți, dintre care cel puțin 24 sunt funcționali, iar restul sunt de rezervă, pentru a înlocui un eventual satelit defect. Sateliții se află la 20 200 km de suprafața Pământului și sunt distribuiți în 6 plane orbitale, care fac un unghi de  $55^\circ$  cu planul ecuatorial. Fiecare plan orbital conține cel puțin 4 sateliți și fiecare satelit descrie o orbită circulară în jurul Pământului în 11 h 58 min. Sateliții sunt distribuiți astfel încât în orice moment și în orice loc de pe suprafața Pământului pot fi observați cel puțin 4 sateliți.

Cei 24 de sateliți emit câte un semnal care se repetă periodic și care poate fi captat de către un receptor special, un echipament care folosește informația pentru a-și determina poziția. În același timp, receptorul poate determina poziția absolută a fiecărui satelit în orice moment. Semnalul emis conține și un cod corector al inevitabilelor erori de orbită, cod actualizat la fiecare oră. Semnalul emis de către fiecare satelit are o perioadă fixă și începutul fiecărui ciclu poate fi calculat de receptor. Sateliții sunt dotați cu câte un ceas atomic de mare precizie, sincronizat cu ceasul receptorului. Când receptorul primește un semnal de la un satelit, el începe să-l compare cu unul generat de el și care se presupune că este identic. În general, aceste semnale nu sunt identice, de aceea receptorul îl modifică pe cel generat de el, până când cele două semnale sunt în fază. În acest mod, receptorul poate să calculeze timpul necesar semnalului să ajungă de la satelit la el.

Sistemul GPS descris mai sus este cel standard și permite calculul poziției receptorului cu o precizie de până la 20 m. Această precizie poate fi îmbunătățită, dar din anul 2000

Departamentul Apărării a introdus în mod intenționat inadvertențe în semnalele sateliților, pentru a reduce precizia sistemului la 100 m.

Presupunem că ceasurile receptorului și ale tuturor sateliților sunt sincronizate perfect.

Receptorul își calculează poziția prin triangulare, al cărei principiu de bază este determinarea poziției unui obiect, cunoscând poziția acelui obiect față de niște obiecte de referință, ale căror poziții sunt cunoscute. Receptorul GPS calculează distanța la sateliți cunoscând poziția acestora.

- Satelitul  $P_1$  emite un semnal care ajunge la receptor în timpul  $t_1$ , timp pe care receptorul poate să-l determine. Distanța până la satelit este  $r_1 = ct_1$ , unde  $c$  este viteza luminii. Mulțimea punctelor care se află la distanța  $r_1$  de satelitul  $P_1$  este o sferă  $S_1$  cu centrul în  $P_1$  și raza  $r_1$ . Într-un sistem cartezian de coordonate, fie  $(x, y, z)$  poziția necunoscută a receptorului și  $(a_1, b_1, c_1)$  poziția cunoscută a satelitelui  $P_1$ . Receptorul se află pe sfera  $S_1$ , deci

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 = c^2 t_1^2. \quad (1)$$

- Informația este insuficientă pentru determinarea poziției receptorului, dar acesta primește un alt semnal în timpul  $t_2$  de la un satelit  $P_2$ , care se află la distanța  $r_2 = ct_2$ . Ca mai sus, receptorul se află pe sfera  $S_2$  cu centrul  $P_2(a_2, b_2, c_2)$  și raza  $r_2$ , deci

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 = c^2 t_2^2. \quad (2)$$

Intersecția celor două sfere este un cerc  $C_{1,2}$  pe care se află receptorul.

- Receptorul mai primește un semnal în timpul  $t_3$  de la un satelit  $P_3(a_3, b_3, c_3)$  aflat la distanța  $r_3 = ct_3$ , deci el este situat pe sfera  $S_3$  cu centrul  $P_3$  și raza  $r_3$  :

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 t_3^2. \quad (3)$$

Receptorul se află deci la intersecția cercului  $C_{1,2}$  cu sfera  $S_3$ . Intersecția unui cerc cu o sferă poate să conțină două puncte, deci teoretic încă nu putem fi siguri care este poziția receptorului. Practic, sateliții sunt poziționați astfel încât una dintre soluții poate fi eliminată, fiind departe de suprafața Pământului. Prin rezolvarea sistemului de ecuații (1), (2), (3) se poate deci determina poziția receptorului.

Prin scădere obținem ecuațiile

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z = A_1, \quad (4)$$

$$2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y + 2(c_3 - c_2)z = A_2, \quad (5)$$

unde

$$\begin{aligned} A_1 &= c^2(t_1^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2, \\ A_2 &= c^2(t_2^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Sateliții sunt plasați astfel încât nu există trei coliniari. Acest fapt ne garantează că printre determinanții

$$\begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & c_3 - c_1 \\ a_3 - a_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}$$

există cel puțin unul nenul. Presupunem că primul determinant este nenul și găsim cu regula lui Cramer din ecuațiile (4), (5) pe  $x, y$  ca funcții de  $z$  :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A_1 - 2(c_3 - c_1)z & 2(b_3 - b_1) \\ A_2 - 2(c_3 - c_2)z & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & A_1 - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & A_2 - 2(c_3 - c_2)z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}} \quad (7)$$

Înlocuind aceste valori în (3) obținem o ecuație de gradul doi în  $z$ , cu soluțiile  $z_1, z_2$ . Substituind  $z$  cu  $z_1$  și  $z_2$  în (7), se obțin cele două soluții căutate  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ , dintre care receptorul o recunoaște pe cea corectă.

Alegem sistemul cartezian de coordonate astfel ca exprimarea poziției prin latitudine, longitudine și altitudine să fie cât mai simplă :

- originea sistemului de coordonate este centrul Pământului;
- axa  $Oz$  este axa polilor și este orientată spre nord;
- axele  $Ox, Oy$  sunt conținute în planul ecuatorial;
- partea pozitivă a axei  $Ox$  trece prin punctul de  $0^\circ$  longitudine;
- partea pozitivă a axei  $Oy$  trece prin punctul de  $90^\circ$  longitudine vestică.

Raza Pământului este egală aproximativ cu 6365 km, deci o soluție  $(x, y, z)$  este considerată acceptabilă dacă  $x^2 + y^2 + z^2 \approx (6365 \pm 50)^2$ . Aproximarea  $\pm 50$  este admisă pentru poziționarea avioanelor și a altitudinilor montane. Latitudinea  $l$  și longitudinea  $L$  sunt unghiuri exprimate în grade și pot fi determinate din egalitățile :

$$x = R \cos L \cos l, \quad y = R \sin L \cos l, \quad z = R \sin l.$$

Cum  $l \in [-90^\circ, 90^\circ]$ , obținem  $l = \arcsin \frac{z}{R}$ , ceea ce ne permite să calculăm  $\cos l$ . Longitudinea  $L$  este deci unic determinată din egalitățile :

$$\cos L = \frac{x}{R \cos l}, \quad \sin L = \frac{y}{R \cos l}.$$

Distanța  $h$  a receptorului față de centrul Pământului este  $h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Putem să înlocuim peste tot pe  $R$  cu  $h$  și să calculăm latitudinea și longitudinea. Altitudinea la care se află receptorul este egală cu  $h - R$ .

Această teorie se aplică într-o lume ideală, dar, din păcate, lumea reală este mult mai complicată. Sateliții sunt dotați cu câte un ceas atomic foarte precis (și foarte scump!), receptorul este înzestrat însă cu un ceas de duzină, accesibil unui buget modest. Chiar dacă ceasurile sateliților sunt sincronizate perfect, receptorul va calcula niște timpi fictivi, conform ceasului său. Fie  $\tau =$  (timpul de sosire a semnalului după ceasul receptorului) – (timpul de sosire a semnalului după ceasul satelitului). Apare astfel o a patra necunoscută  $\tau$ , decalajul ceasului receptorului față de ceasurile sateliților, ceea ce impune considerarea unui al patrulea satelit. Se aplică în mod similar regula lui Cramer pentru determinarea poziției receptorului, ceea ce este posibil, deoarece nu există trei sateliți coplanari vizibili dintr-un punct dat de pe suprafața Pământului.

Dacă receptorul “vede” mai mult de patru sateliți, atunci se poate arăta că pentru a obține o aproximare mai bună a poziției sale, receptorul trebuie să aleagă acei patru sateliți care maximizează determinantul

$$\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}.$$

Distanțele sunt calculate de către receptor folosind constanta  $c$ , care este viteza luminii în vid. În realitate semnalul traversează atmosfera și se refractă, ceea ce îi lungeste traiectoria și îi micșorează viteza. Se folosește de aceea un receptor auxiliar (stație de bază) cu poziție fixă cunoscută, realizându-se astfel un GPS *diferențial* (DGPS), cu o precizie de ordinul centimetrilor.

Pământul nu este sferic în realitate, el este turtit la poli, cu raza de 6356 km, pe când la ecuator raza este de 6378 km, de aceea trecerea de la coordonate carteziene la cele geografice trebuie să ia în considerare acest fapt.

Viteza sateliților și masa Pământului sunt mari, deci conform teoriei relativității (confirmată de măsurători) ele vor influența mersul ceasurilor sateliților. Cu toate că aceste influențe sunt de sens contrar, ele nu se anulează reciproc, deci trebuie considerate împreună în calcule.

Până acum Statele Unite dețin monopolul pe această piață, ceea ce le permite un control exclusiv. În 2002 Uniunea Europeană a creat un fond de dezvoltare pentru Galileo, un sistem de poziționare alternativ față de GPS.

*Notă.* Această scurtă prezentare este realizată după <sup>[7]</sup>, dezvoltări mai ample ale subiectului pot fi găsite în <sup>[2]</sup><sup>[4]</sup><sup>[5]</sup>, celelalte lucrări conțin alte aplicații interesante ale matematicii în probleme de transport, dar și în alte domenii.

## Bibliografie

- [1] Bolt, Brian, *Mathematics meets Technology*, Cambridge University Press, Cambridge New York Port Chester Melbourne Sydney, 1991
- [2] French, Gregory T., *Understanding the GPS*, GeoResearch, Inc., 1996
- [3] Bossler, John D. (ed.), *Manual of Geospatial Science and Technology*, Taylor and Francis, Inc., London New York, 2002
- [4] Beidleman, Scott W. (Lt. Col. USAF), *GPS versus Galileo, Balancing for Position in Space*, Air University Press, Maxwell Air Force Base, Alabama 36112 – 6615, 2006
- [5] Kaplan, Elliott D., Hegarty, Christopher, J. (eds.) *Understanding GPS, Principles and Applications*, Artech House, Inc., Boston London, 2006
- [6] Heydecker, Benjamin (ed.), Centre for Transport Studies, University College London, UK, *Mathematics in Transport* (Selected Proceedings of the 4<sup>th</sup> IMA International Conference on Mathematics in Transport ), Elsevier Ltd., 2007
- [7] Rousseau, Christiane, Saint-Aubin, Yvan, *Mathematics and Technology*, Springer, 2008

## MODELAREA ÎN AUTOCAD A ROȚILOR DINȚATE CU PROFIL EVOLVENTIC

Autor: prof. ILIE GHEORGHE

TECUCI-GALAȚI

În lucrare sunt redată procedee de desenare în AutoCAD 2008 a roților dințate cu profil evolventic.

### I. MODELAREA ROȚILOR DINȚATE CILINDRICE CU DINȚI DREPTI

La modelarea unei roți dințate problema cea mai dificilă este realizarea flancurilor dinților. Dacă se realizează profilul evolventic al flancului dintelui, restul este o chestiune de rutină pentru o persoană care utilizează frecvent AutoCAD-ul. Voi pleca de la o situație concretă, presupunând că mi se cere să modelez o roată dințată care face parte dintr-un angrenaj cilindric cu dinți drepti și am următoarele date.

Modulul danturii,  $m=2\text{mm}$ ;

Numărul de dinți ai roții conducătoare  $z_1=20$ ;

Numarul de dinți ai roții conduse  $z_2=30$ ;

Unghiul cremalierii de referință  $\alpha=20^\circ$ .

Lățimea danturii  $b=2$

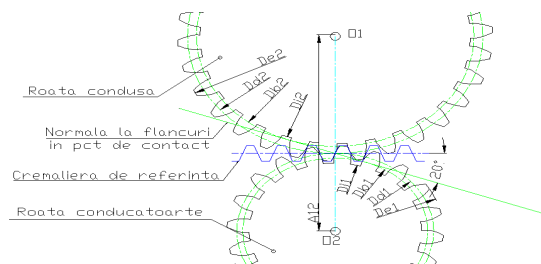


Fig. 1-Elementele geometrice

Profilul se va trasa plecând de la definiția evolventei care este *traectoria descrisă de un punct al unei drepte care se rostogolește fără alunecare pe un cerc fix numit cerc de bază.*

Pentru început sunt necesare niște calcule ale elementelor geometrice ale danturii:

Diametrele de divizare:  $D_{d1}=m \cdot z_1=2 \times 20=40\text{mm}$

$$D_{d2}=m \cdot z_2=2 \times 30=60\text{mm}$$

Diametrele exterioare:  $D_{e1}=m(z_1+2)=2(20+2)=44\text{mm}$

$$D_{e2}=m(z_2+2)=2(30+2)=64\text{mm}$$

Diametrele interioare  $D_{i1}=m(z_1-2,5)=2(20-2,5)=35\text{mm}$

$$D_{i2}=m(z_2-2,5)=2(30-2,5)=55\text{mm}$$

Diametrele de bază:

$$D_{b1}=D_{d1} \cdot \cos\alpha=40 \cdot \cos 20^\circ=40 \times 0.939693=37.5877\text{mm}$$

$$D_{b2}=D_{d2} \cdot \cos\alpha=60 \cdot \cos 20^\circ=60 \times 0.939693=56.38156\text{mm}$$

Distanța între axe  $A_{12}=\frac{1}{2}(D_{d1}+D_{d2})=\frac{1}{2}(40+60)=50\text{mm}$

Pentru realizarea desenului profilului roții conducătoare se parcurg următorii pași:

- Se întocmește în Excel un tabel cu elementele geometrice ale danturilor celor două roți (vezi documentul Excel "data table". Tot în acest tabel se determină și celelalte date care folosesc calculul tabelar. La realizarea tabelului se vor folosi formulele de calcul, pentru ca datele să poată fi adaptate și pentru alte valori ale numărului de dinți și/sau ale modulului. Tabelul se importă în AutoCAD cu hiperlegătură bilaterală.
- Folosind datele din tabel, se trasează linia centrelor, cercurile de divizare, de exterior și de interior;
- Prin punctul de tangență a cercurilor de divizare se trasează o dreaptă înclinată la  $20^\circ$ , aceasta constituind normala comună la flancurile celor două profile în punctul de contact;
- Din centrele O1 și O2 se coboară perpendiculare pe dreapta abia construită. Aceste linii reprezintă razele cercurilor de bază cercuri ce servesc la generarea profilelor evolventice;
- Se trasează cercurile de bază. La această trasare, raza cercului se va stabili prin folosirea OSNAP, opțiunea *Tan*.
- În continuare, pentru a înțelege mecanismul de lucru, se impune lămurirea câtorva noțiuni referitoare la definirea evolventei.

Considerăm un cerc fix **C** și o dreaptă **D** tangentă la cerc în punctul **M<sub>0</sub>**.

(Fig. 3). Dacă dreapta se rostogolește peste cerc, atunci ea își schimbă punctul de contact cu cercul, acesta ajungând la un moment dat în punctul  $T$ , a cărei rază vectorie face cu linia centrelor un unghi  $u$ , iar punctul  $M_0$  fix pe dreaptă, ajunge în  $M$  pe o traiectorie evolventică. Deoarece rularea se face fără alunecare, lungimea segmentului  $TM$  este egală cu cea a arcului  $TM_0$ . Această stare geometrică ne îndreptățește să spunem că pentru a ajunge într-un punct

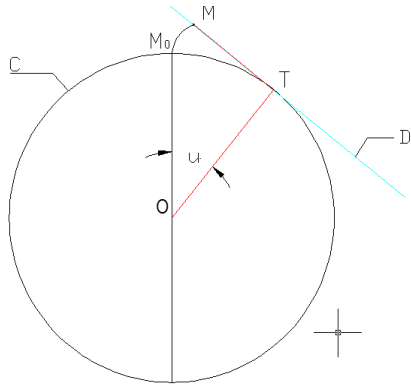


Fig. 2- Definirea evolventei

oarecare  $M$ , al evolventei, putem urma traseul  $O-T-M$ , având toate coordonatele pentru trasarea în AutoCAD a unei polilinii ce conține segmentele  $OT$  și  $TM$ .

- Folosind definiția evolventei se determină un număr de puncte ale evolventei; Pentru aceasta, se întocmește în Excel tabelul de variație a parametrilor geometrici ai danturii, în funcție de unghiul  $u$ , pentru valori ale acestuia din 5 în 5 grade.

- Cu comanda *Spline* se unesc punctele determinate obținându-se evolventa.

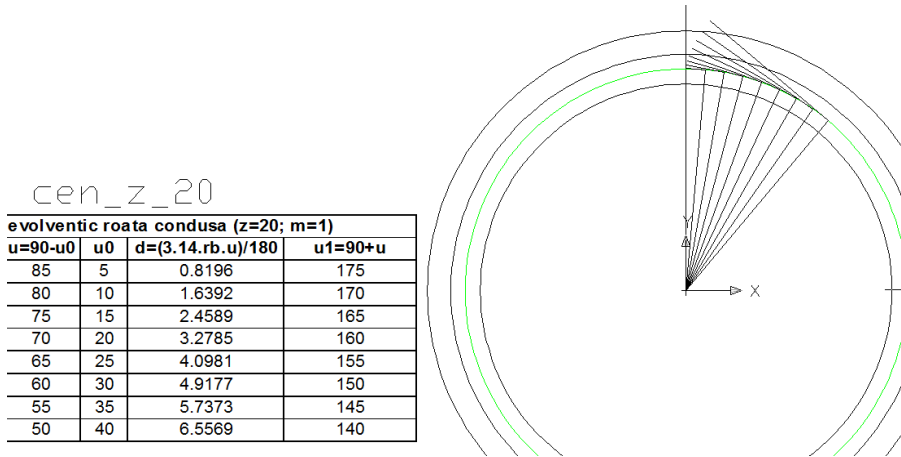


Fig. 3-Determinarea punctelor evolventei



- Se completează profilul cu un segment de dreaptă cuprins între cercul de bază și cercul de interior, apoi, folosind comanda *Trim*, se elimină porțiunea ce depășește cercul de exterior;
- Acest flanc se poziționează astfel încât el să intersecteze cercul de divizare la un unghi la centru

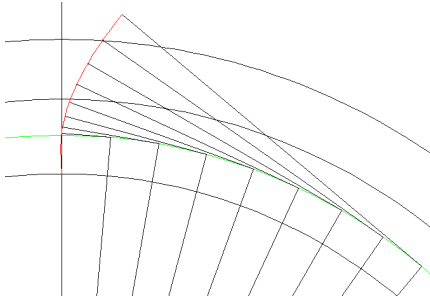


Fig. 4- Trasarea evolventei

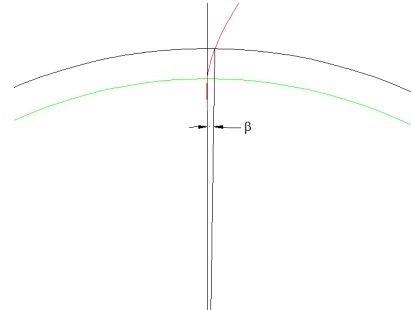


Fig. 5-Unghiului de rotire a pfofilului

de  $360^\circ/(4z)$  la stânga față de linia centrelor, unde  $z$  este numărul de dinți ai roții. Poziționarea profilului se face folosind comanda *Rotate*. Mai întâi se calculează unghiul folosind comanda *Cal-Ang(end, end,end)* și adăugând un unghi egal cu  $1/4$  din unghiul la centru corespunzător unui dinte.

O metodă rapidă pentru determinarea unghiului dintre vectorul punctului de intersecție a profilului cu cercul de divizare este metoda dinamică, care constă în următoarele: se activează butonul *DYN* din linia de stare, se selectează linia la promtul **Comand**: după care se poziționează mouse-ul asupra gripului de sus fără a apăsa butonul. Pe ecran se vor afișa coordonatele polare ale punctului respectiv.

- După poziționarea corectă a profilului flancului stâng, cel din dreapta se obține foarte ușor prin comanda *Mirror*.

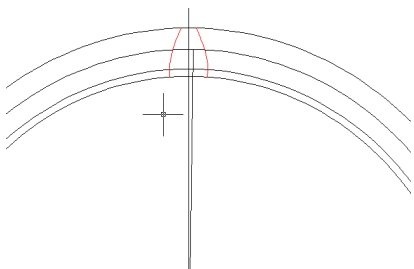


Fig. 6-Oglindire profil

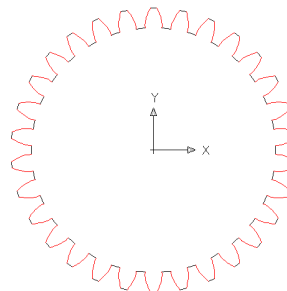


Fig. 7 Profilul complet

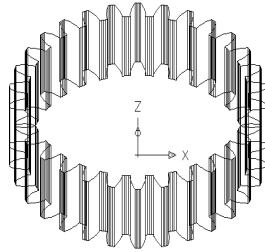


Fig. 8- Profilul extrudat

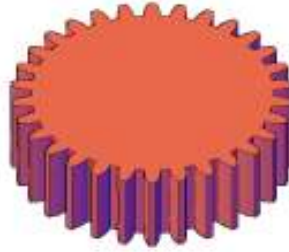


Fig. 9- Aplicare umbre

Se multiplică ansamblul compus din cele două flancuri folosind comanda *Array* și se îndepărtează cu *Trim* părțile din cercurile de exterior și de interior care sunt în plus.

- Se creează o regiune cuprinsă în conturul astfel obținut, care poate fi extrudată pe o înălțime egală cu cea cerută în problemă.

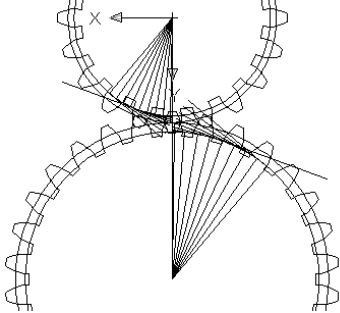


Fig. 10- Desenare profilului

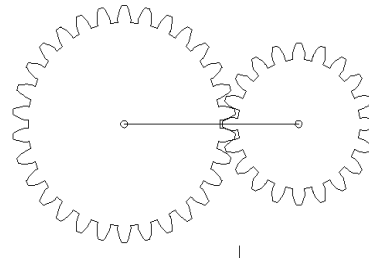


Fig.11- Potrivirea

- Dacă se dorește, se procedează la fel și cu roata conducătoare (figura 10), urmând aceiași pași ca la roata conducătoare, până la obținerea regiunii închise de profil. Apoi se rotesc profilele astfel încât linia centrelor să constituie axă de simetrie pentru un dinte al roții conducătoare și un gol al roții conduse (figura 11).
- Profilele obținute pot fi extrudate pe o înălțime egală cu lățimea dintelui, pentru a obține modelele solidelor brute al roților dințate.
- Dacă schimbăm modulul și păstrăm numărul de dinți, nu este nevoie să desenăm un alt profil. Acesta se poate obține prin scalarea profilului deja realizat la o scală determinată de raportul dintre modulul roții noi și cel al roții cunoscute. Recomandabil este să se realizeze profilul pentru modul  $m=1\text{mm}$  după care să se scaleze la un factor egal cu modulul roții, păstrându-se o copie de rezervă înaintea scalării. Se poate realize, chiar o colecție pentru roți cu numerele de dinți cele mai utilizate.
- Dacă dorim să obținem modelarea unui angrenaj cu roți dințate cilindrice cu dinți drepecți, facem extrudarea regiunilor închise de cele două profile pe o înălțime de 20mm. Pentru modelarea corpurilor roților, se aplică metodele clasice de desenare și editare (vezi figura 12 b).

## I MODELAREA ROTILOR DINȚATE CILINDRICE CU DINȚI ÎNCLINATI

Pentru danturile înclinate propun o metodă oarecum diferită de cea pentru dinți drepți. Până la obținerea profilului plan al celor două flancuri ale unui dinte metoda este identică, de aici lucrurile rezolvându-se altfel. Mai întâi se realizează complet un dinte, apoi, prin comanda *3DArray* se multiplică. Se modelează separat corpul roții (un cilindru centrat corect între dinți) și cu comanda *Union* se obține modelul roții. Iată concret cum am realizat aceasta.

- Având profilele celor două flancuri ale dintelui și cercurile de interior și de exterior, putem obține ușor conturul închis al profilului (*figura 13*).
- Folosind calculatorul AutoCAD care se deschide cu comanda *Quickcal*, determinăm pasul elicei danturii  $p_E$ , având cunoscute unghiul de înclinare a dintelui pe care îl luăm  $\gamma=20^\circ$  și diametrul de divizare pe care îl cunoaștem ( $D_d=60\text{mm}$ , pentru roata Z30;  $m=2\text{mm}$ ).

$$\text{Tg}\gamma = \frac{\pi D_d}{p_E}; \text{ rezultă } p_E = \frac{60\pi}{\text{tg}20^\circ} = 517,8873\text{mm}.$$

- Se trasează un arc de elice cilindrică cu diametrul de 60mm, cu pasul de 517,8873mm și cu înălțimea de 20mm. Acest arc servește drept curbă directoare pentru obținerea dintelui prin translatarea profilului cu comanda *Sweep*.
- Se construiește un cilindru cu diametrul de 55mm (diametrul interior al danturii), se multiplică dintele cu comanda *3DArray*, iar cu comanda *Union* se obține roata brută.

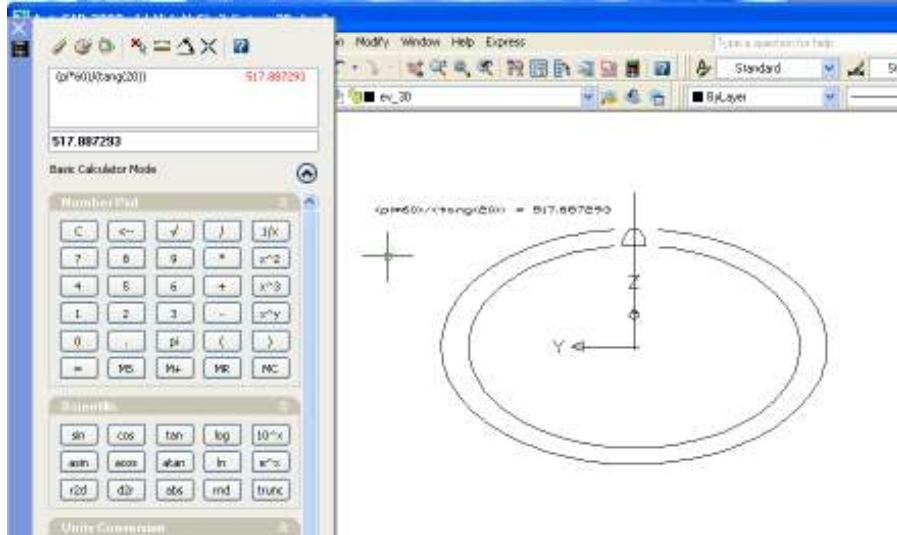


Fig. 13- Calcularea pasului elicei

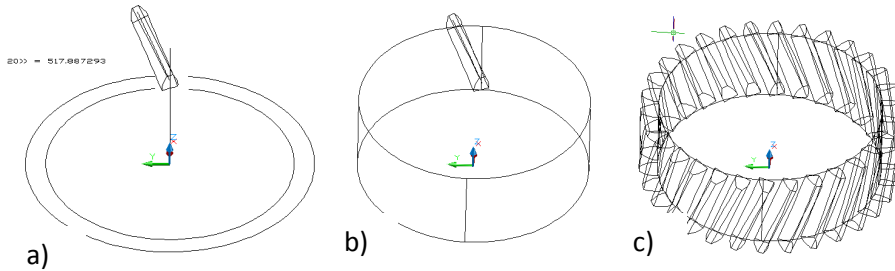


Fig. 14- Etapele modelării roții. a) desenarea unui dinte, b) desenarea corpului cilindric, c) multiplicarea dintelui

- Modelarea se poate continua obținându-se roata din figura 15.
- În mod similar se poate realiza și roata conjugată și dacă le poziționăm corespunzător, putem obține angrenajul cu roți dințate cilindrice cu dinți înclinați (figura 16). Trebuie ținut, însă cont că sensurile de înclinare a flancurilor dinților celor două roți conjugate, sunt inverse.

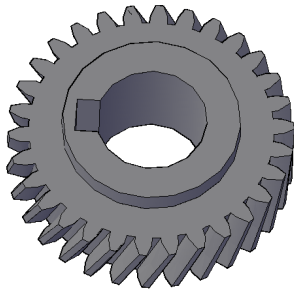


Fig. 15- Modelul definitiv al



Fig.16- Angrenaj cu roți dințate

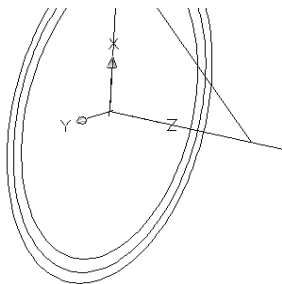


Fig. 17-Profilul dintelui

20, iar modulul este de 2mm. conului de divizare de  $90^\circ$  și a flancului dintelui egală cu

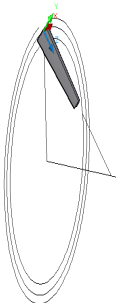


Fig.18

### MODELAREA ROTILOR DINȚATE CONICE

Pentru modelarea roților dințate conice trebuie cunoscute toate elementele geometrice ale angrenajului. Pentru o simplificare a lucrurilor, ne propunem să desenăm un angrenaj conic cu dinți drepecți, care are rolul numai de a schimba direcția de transmitere a mișcării cu  $90^\circ$ , fără a modifica raportul de transmisie, având, deci roțile egale.

Dealtfel, acest caz este frecvent întâlnit în realitate. Mai presupunem și că numărul de dinți ai fiecărei roți este Efectuând niște calcule determinăm unghiul la vârf al pentru o lățime a roții brute de 15mm, rezultă o lungime jumătate din generatoarea conului de divizare. Cu aceste

date putem modela una din roți și apoi întreg angrenajul conic parcurgând următorii pași:

- Până la obținerea profilului unui dinte se procedează la fel ca la roata dințată cilindrică cu dinți înclinați, de aici lucrurile fiind puțin diferite.
- Se stabilește sistemul de referință ca în *figura 17* și se trasează generatoarea care este ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel. Apoi, cu comanda *Break* se separă jumătatea din această ipotenuză, care constituie directoarea pe care se creează dintele cu comanda *Sweep* (vezi *figura 18*).
- Se șterg toate cercurile și se desenează corpul brut al roții care este un trunchi de con cu centrul bazei mari în originea UCS-ului curent și cu diametrul de 55mm, diametrul bazei mici de 55/2 mm, iar înălțimea de 20mm (*figura 19*);
- Cu comanda *3DArray* se multiplică dintele, iar cu comanda *Union* se monolitizează corpul cu dinții obținându-se roata brută (*figura 20*)
- După o fasonare a modelului brut cu metode clasice de modelare, se obține roata ca în *figura 21*;

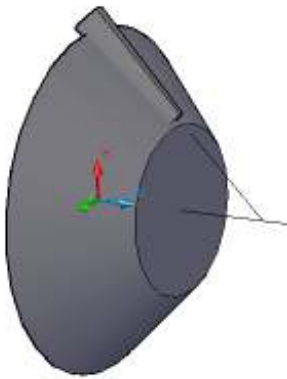


Fig. 19- Desenarea conului

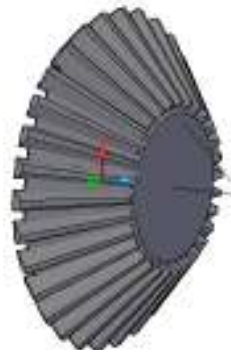


Fig.20-Modelul brut al roții

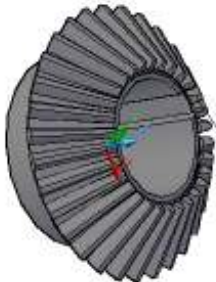


Fig. 21-Modelul definitiv



Fig. 22-Angrenajul conic

- Pentru obținerea angrenajului este nevoie de o a doua roată care, din datele problemei, știm că este identică cu prima. Pentru aceasta, cel mai ușor este să se procedeze astfel:
  1. Cu comanda *Copy* se face o copie a roții, suprapusă peste roata originală;
  2. Cu comanda *3DRotate* se rotește copia cu  $90^0$  în jurul unei axe paralelă cu *Y* și care trece prin vârful conului de divizare;
  3. Pentru potrivirea danturilor, se rotește cu  $3^0$  prima roată obținându-se angrenajul din *figura 22*.

Pentru alte valori ale parametrilor angrenajului este nevoie de un calcul riguros de determinare a curbei directoare pentru generarea dintelui, profilul acestuia obținându-se la fel pentru toate tipurile de danturi.

## ANGRENAJE ÎN NATURĂ

ing. Bageag Steluța

Liceul tehnologic „Victor Frunză”, Râmnicu Sărat

Ce ar fi viața noastră fără tehnologie? Ce ar fi tehnologia fără mișcare? Și mai ales fără mișcarea de rotație?

În studiul mișcării de rotație învățăm despre angrenaje. Studiul acestora explică majoritatea situațiilor cu mișcare de rotație.

În evoluția civilizației umane „descoperirea” roții reprezintă un eveniment major. Roata dințată a fost utilizată mai târziu și avem vestigii în acest sens.

Conform cunoașterii la acest moment roata dințată a fost inventată de mecanicii Greciei antice în Alexandria. În secolele următoare acest concept simplu a devenit piatra de temelie a tehnologiei moderne prmițând crearea a tot felul de „mașinării”, și vehicule.

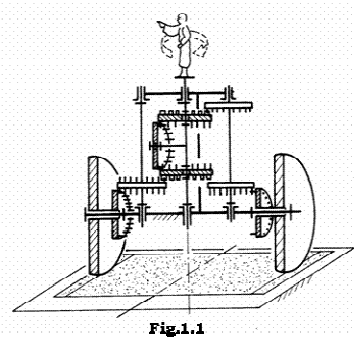


Fig.1.1

Chinezii, în jurul anului 260 î.Hr., foloseau angrenajele. Un exemplu în acest sens este reprezentat de „carul aratator al sudului” (fig.1.1).

*M. P. Vitruvius* (16 î.Hr.) a descris amănunțit prima moara cu angrenaj cu bolturi, în care roțile au axele perpendiculare și în care, ca urmare, era posibilă utilizarea roții cu ax orizontal ca sursă motoare (fig.1.5).

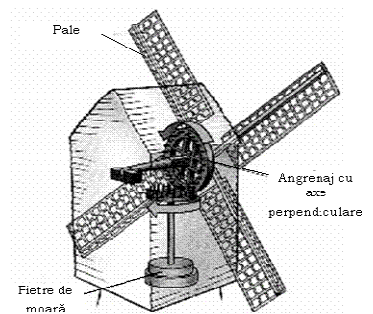
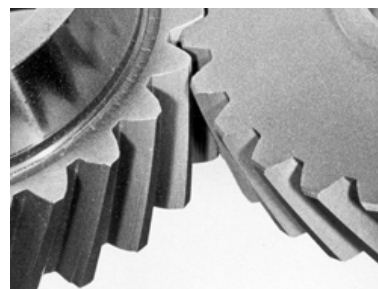


Fig.1.5

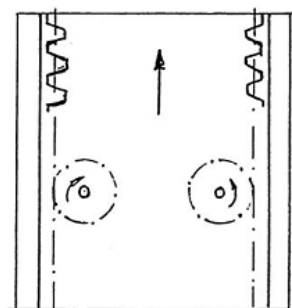
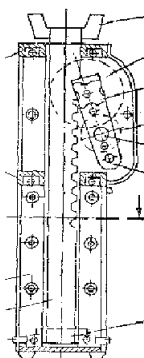
Apoi au fost utilizate pentru ridicarea unor porți grele a unor baraje etc.



**Angrenajul** este mecanismul format din două roți dințate, care transmite – prin intermediul dinților aflați succesiv și continuu în contact (angrenare) – mișcarea de rotație și momentul de torsiune între cei doi arbori .



De asemenea angrenajul poate transforma mișcarea de rotație în mișcare de translație. Astfel au fost create mecanisme pinion-cremalieră care transformă mișcarea de rotație a pinionului pentru a realiza înaintarea unei piese solidară cu cremaliera(ex cricul cu cremalieră) sau la mașinile-unelte grele se pot utiliza două angrenaje pinion-cremalieră pentru a realiza înaintarea unei piese de dimensiuni mari.



Abia în zilele noastre , după foarte multe „revoluții,, tehnologice descoperim că natura avea angrenajul deja inventat.

Oamenii de știință de la Universitatea din Cambridge au descoperit că o insectă comună **Issus** care se poate întâlni în multe din grădinile europenilor formează niște articulații interesante la nivelul picioarelor din spate. Practic sunt două sectoare de  $180^\circ$  de

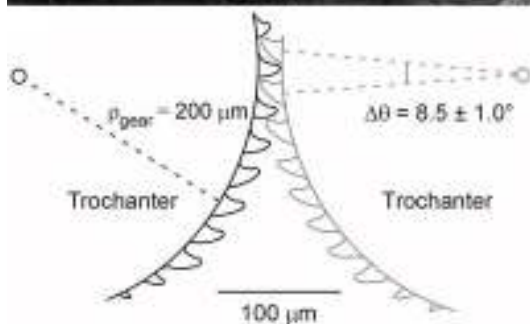
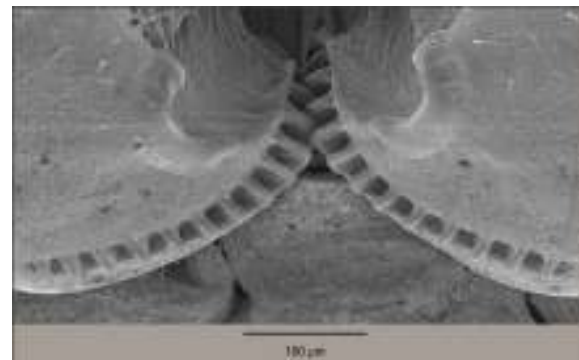
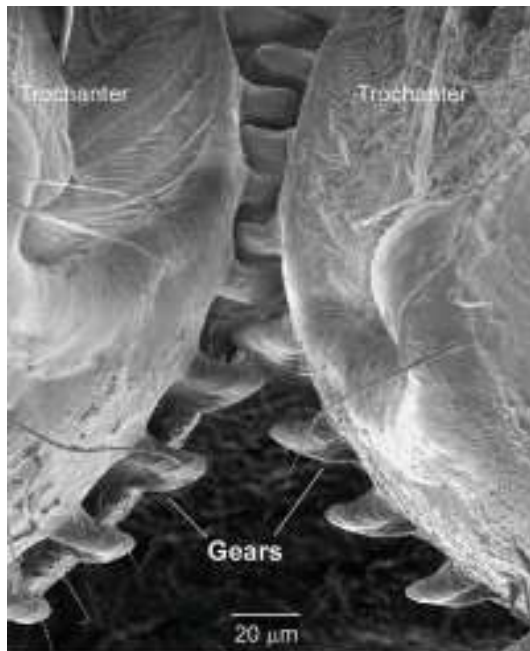


formă elicoidală cu 10-12 creste de tipul danturii roților dințate care „angrenează”. Aceste articulații se rotesc și angrenează precum roțile dințate și sincronizează picioarele din spate ale insectei în momentul în care ea sare. Saltul insectei ajunge la 300-400mm ceea ce reprezintă de peste 100 de ori lungimea sa. Profesorii de zoologie Malcolm Burrows și Gregory Sutton au descoperit că acest fenomen se întâmplă doar în faza de ninfă a insectei, *Issus coleoptratus*.

Pentru a sări la țintă „angrenajul”, sincronizează mușchii picioarelor din spate care sunt tensionate și apoi blocate pentru a realiza saltul.

Pe durata rotației lor parțiale „roțile”, se ating o viteză de 33.000 rot/min și ajung la o viteză de 39m/s.

Totuși, în faza de adult acest mecanism dispare iar săriturile ajung la lungimi mult mai mari.



Cercetătorii britanici spun că „ în general privim roțile dințate ca pe ceva ce găsim în mașinile proiectate de oameni, dar avem această percepție doar pentru că nu ne-am uitat



*suficient în jur. Aceste roți nu sunt proiectate; ele sunt evaluate –reprezentând mașini de înaltă viteză și precizie evaluate cu scopul sincronizării în lumea animală,,.*

Malcolm Burrows și Gregory Sutton au publicat cercetările lor în revista *Science*.

Bibliografie :

<http://whyfiles.org/2013/got-gears-lets-leap-says-the-leafhopper/>  
<http://www.smithsonianmag.com/science-nature>

## DISCIPLINELE TEHNICE PREDATE VIRTUAL

PROF.GRIGORESCU VIORICA

GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI PLOIEȘTI

Noile tehnologii utilizate în domeniul tehnic a produs schimbări dramatice în economie, educație, cultură, ca rezultat al găsirii și transmiterii informațiilor în forma digitală, devenind în societatea umană funcția critică ce influențează puternic relațiile sociale .

**Predarea disciplinelor tehnice** necesită armonizarea tuturor stilurilor de învățare cu ultimile metode de învățare, astfel încât elevii să poată învăța, crea, descoperii și reține noile informații atunci când participa interactiv la actul predării -învățării -evaluării.

Disciplinele tehnice joacă un rol important în conținutul învățământului, deoarece se face educația tehnologică a elevilor, care are ca obiectiv fundamental integrarea tineretului în civilizația epocii sale, înțelegerea profundă și logică a rolului pe care îl are tehnica în existența omului și în progresul societății.

**Studierea disciplinelor tehnice în învățământul preuniversitar se face modular care duce la dobândirea competențelor profesionale** – capacitatea intelectuală de a utiliza și conduce mașinile și utilajele într-un proces tehnologic în continuă transformare și perfecționare. În aceste condiții noi, competența profesională nu implică numai manipulări de unelte și mașini, ci și cunoștințe privind sistemul lor de funcționare, capacitatea de a înțelege și a inova.

**Competențele** sunt ansambluri structurate de cunoștințe și deprinderi dobândite prin învățare. Din punct de vedere profesional competențele dobândite permit practicarea cu succes a unei meserii, exercitarea unei funcții sau executarea unei sarcini precise . În același timp competențele dobândite

exprimă pregătirea adecvată saltului la o treaptă superioară de învățământ sau începerii unei cariere profesionale.

Prin **predarea disciplinelor de specialitate**, se urmărește ca elevii să-și însușească un sistem de cunoștințe, un mod de a acționa, de a gândi și de a se raporta la realitate, care să asigure premisele competenței și responsabilități profesionale, calificarea într-un domeniu corespunzător fiecărui profil de pregătire : mecanic, electric, automatizari.

Conținutul învățământului este stabilit și precizat prin planurile de învățământ, programe și manuale școlare, prin care se delimitează câmpul de informații și volumul cunoștințelor necesare pregătirii de specialitate a elevului.

Fixându-și drept ținte ale activității didactice competențele pe care le vor avea elevii, profesorul devine organizatorul unor experiențe de învățare utilizând metodele și mijloacele cele mai potrivite, prin pregătirea de specialitate și talentul sau pedagogic.

Formarea competențelor profesionale a absolvenților învățământului preuniversitar tehnic este asigurată prin instruirea lor complexă și progresivă, pornind de la probleme generale ale domeniului de activitate spre cele specifice unei anumite meserii.

Pentru a ajunge la absolventul de nivel 3, liceu tehnologic, care se califică în meseriile din domeniul tehnic, trebuie conform standardelor de pregătire profesională să fie capabili să îndeplinească sarcini cu caracter tehnic, foarte greu de realizat în condițiile unei dotări modeste ale laboratorului tehnologic sau atelierului școală.

**Calificarea “Tehnician mecatronist “** prevede abilități și deprinderi care să-i permită absolventului îndeplinirea unor sarcini cu caracter tehnic de montaj, punere în funcțiune, întreținere, exploatare și reparare a sistemelor mecatronice. Testează prototipurile, concep și realizează scheme de montaj ale echipamentelor mecatronice, contribuie la estimarea cantităților și costurilor materiale, la estimarea forței de muncă necesare. Asigură controlul tehnic al instalațiilor, întreține sistemele mecatronice în vederea funcționării conform specificațiilor și reglementărilor.

**Disciplinele tehnice** au rolul de a arăta elevului, mecanismele de funcționare ce stă la baza lucrurilor ce ne înconjoară, lucrurile ce ne sunt utile în viața de zi cu zi. Importanța acestora sunt redate de profesor prin actul predare-învățare-evaluare, care se **realizează prin proiectarea activității didactice**.

«Aceasta activitate de mare complexitate pedagogică și socială angajează acțiunile și operațiile de definire anticipativă a obiectivelor, conținuturilor, strategiilor învățării, problemelor de evaluare, și mai ales a relațiilor dintre acestea în condițiile specifice unui mod de organizare a procesului de învățământ.  
»

«Proiectarea este înainte de orice un act de gândire și presupune mai multe întrebări pe care trebuie să și le pună proiectantul (profesorul) . Aceste întrebări au o succesiune logico-didactică și răspunsurile la ele marchează etapele proiectării didactice .» întrebările care trebuiesc soluționate sunt: 1.Ce voi face ? 2.Cu ce voi face ? 3.Cum voi face ?4.Cum voi ști dacă cea ce trebuie făcut a fost făcut ?

La cele două niveluri ale sistemului educațional produsele proiectării didactice pot fi :

- la nivel macro : planurile cadru; planuri de învățământ; programele sau curriculum; standarde de pregătire profesională; manuale școlare; ghiduri metodologice;
- la nivel micro: proiectarea /planificarea activității anuale și semestriale; proiectarea unităților de învățare; proiectarea lecției/lecțiilor specifice fiecărei unități de învățare

Voi aborda proiectarea la nivel micro și anume mă voi referi numai la **proiectarea lecției** .

**Lecția** este modalitatea prin care activitatea de predare-învățare este organizată astfel încât pornind de la un conținut de învățare delimitat se asigură pe o perioadă de timp dată, realizarea obiectivelor pedagogice.

Modul de organizare și desfășurare a lecției depinde de sarcina didactică principală.

Sarcina didactică depinde de următoarele atribuții: - transmiterea cunoștințelor sau comunicare;

- formarea deprinderilor; - recapitularea și consolidarea cunoștințelor; -verificarea și aprecierea cunoștințelor;

Actul de predare- învățare -evaluare implică utilizarea unor metode, mijloace, acțiuni pentru a putea duce la atingerea obiectivelor (competențelor) propuse .

Folosirea metodelor moderne de învățământ este imperativ determinată de cerințele actuale ale învățământului tehnic care urmărește să ofere elevilor, pe lângă acumularea de cunoștințe , o gândire logică , capacitatea de a folosi în mod creator noțiunile însușite și de a-și pune în valoare aptitudinile

specifice meseriei pe care o va exercita în viitorul apropiat.

Pentru atingerea acestor deziderate este necesar să se folosească metode de învățământ active care să solicite gândirea elevilor în mod activ pe tot parcursul lecțiilor, folosirea unui bogat material didactic prin care elevii sunt obligați să desfășoare activități de observare și prelucrare.

Practica a demonstrat că utilizarea materialelor audio-vizuale, media, captează interesul elevilor, lecțiile desfășurându-se în mod antrenant, cu participarea întregii clase.

**Utilizarea activităților virtuale** în predarea-învățarea-evaluarea disciplinelor tehnice prezintă următoarele caracteristici :

- indicarea mai multor viziuni asupra aceluiași subiect, conducând astfel la dezbateri;
- prezentarea detaliilor, dintr-o perspectivă neobișnuită care nu se găsesc în manualele uzuale și care nu pot fi observate prin propriile mijloace;
- redarea într-un mod accesibil a unei probleme complexe, printr-un“dosar” cu multiple intrări;
- permiterea observării genezei unui fenomen, formele sale succesive în timp, în istorie, relațiile sale cu alte fenomene, dezvoltarea unui spirit critic în raport cu reprezentările realității și simulările lor;
- formarea capacității de a se exprima cu ajutorul imaginilor și /sau sunetului;
- folosirea de imagini și sunete în construirea cunoștințelor și în dezvoltarea lor;

•posibilitatea transformării și prelucrării informației, folosind puterea de calcul a calculatorului. De îndată ce o imagine este digitizată, calculatorul va „ști” să-i aplice toate transformările legate de tipul de focalizare, deformare sau de schimbare a culorilor cu o rapiditate de neegalat.

La intersecția dintre tehnologii și invențiile creatoare în multimedia se situează realitatea virtuală, realizată cu ajutorul proiectării 3D, care se caracterizează prin :

- timp real – acțiunile utilizatorului pot modifica instantaneu spațiul ;
- interactivitate – posibilitatea de a muta și manipula obiecte în spațiu ;
- imersiune – sentimentul de apartenență/ prezență la spațiul virtual

**Aplicațiile** cele mai importante ale **realității virtuale** sunt considerate următoarele :

- modelare, simulare și vizualizare în domeniul științific, prin care se obțin imaginea și studiul diferitelor modele sau fenomene inaccesibile observației directe (fluxuri de informații, structuri atomice, sisteme meteorologice, sisteme cosmice etc.);
- experimente și simulări ale funcționării instalațiilor, pentru învățarea diferitelor proceduri fără a distruge aparatele sau a pune în pericol viața echipei;
- sisteme de simulare (simulatoare) pentru antrenamentul piloților, șoferilor sau astronautilor prin care se pot exersa manevre dificile, fără a fi în pericol viața participantului sau securitatea cabinei de vehicul (avion, elicopter, mașină, tren, navă maritimă, navă spațială etc.);
- proiectare asistată de calculator (CAD) în diferite domenii (mecanic,electric,construcții, arhitectură etc.), prin care proiectantul are posibilitatea să vadă rezultatele proiectului sub forma imaginii acestuia în timp real, să observe.

**Acțiunile întreprinse de către profesor** pentru asigurarea și menținerea condițiilor învățării se numesc evenimente ale instruirii, care sunt : -captarea atenției; -comunicarea obiectivelor (competențelor); -reactualizarea cunoștințelor; -dirijarea învățării și obținerea performanțelor; - asigurarea feed - back-ului; -asigurea retenției și transferul de cunoștințe;

**Activitățile virtuale se pot utiliza în toate etapele desfășurării evenimentelor lecției.**

Vom exemplifica pentru **disciplina : „Asamblări mecanice” lecția”Asamblări nituite”**, etapele parcurse în transmiterea cunoștințelor.

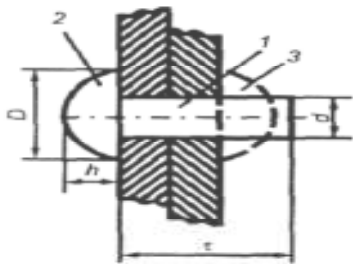
- **Captarea atenției** : Asamblările nituite sunt larg răspândite în industria construcțiilor metalice, industria navală, industria aeronauticii.

Se prezintă imaginea unui elicopter în mișcare și detaliat asamblarea nituită.



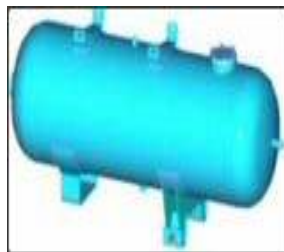
-**Transmiterea cunoștințelor** prin atingerea competențelor vizate la începutul lecției:

**C1**-definiția nituirii și elementele nitului.Se prezintă imagini cu nituri în mișcare, modul cum se assemblează.



**C2**-Utilizarea nituirii

Se prezintă imagini din diferite domenii.



**C3**-Clasificarea niturilor.

Se prezintă imagini cu tipuri de nituri în mișcare,secționare



#### C4 –Tehnologia nituirii manuale și mecanice .

Se prezintă scule,dispozitive,utilaje , modul de asamblare a pieselor prin imagini în mișcare.



#### Utilizarea activităților virtuale în predarea disciplinelor tehnice au o serie de avantaje :

- exemplificarea virtuală a proceselor studiate;
- simularea unor fenomene imposibil de observat în realitate, datorită timpului îndelungat în care au loc ;
- integrarea aspectele dinamice ale subiectului studiat cu ajutorul animațiilor;

- studiul proceselor prin informații descriptive sau experimente virtuale;
- simularea fenomenelor prezentate, uneori imposibil de urmărit în laboratorul clasic;
- legarea teoriei cu practica;

**Bibliografie** :1. Angela Nesteriuc-Ghid metodic pentru ingineri-Ed.Univ.St.cel Mare ,2002; 2. AEL

-Lecții interactive SIVCO 2005; 3.Stan Panțuru-Teoria și metodologia instruirii.Teoria și metodologia evaluării-Ed. Univ. Transilvania Brașov, 2006; 4. Standarde de pregătire profesională liceu tehnologic nivel 3-Tehnician mecatronist Anexa 2 la OMEC nr.1847/2007; 5.Starețu-Utilizarea realității virtuale în procesul de instruire specifice disciplinelor mecanice din curricula liceelor cu profil tehnic; 6. [www.google.imagini.ro](http://www.google.imagini.ro).



