Revista Virtuală

Info MateTehnic

Revista virtuală de cultură tehnică, matematică şi informatică pentru elevi, studenţi, maiştri şi profesori din învăţământul preuniversitar şi universitar

Revista Virtuală
Info Mate Tehnic

Anul III Nr. 7-8-9/2013

www.infomate.ro

ISSN 2069-7988

ISSN-L 2069-7988

Revista Virtuala Info MateTehnic **ISSN 2069-7988**
ISSN-L 2069-7988

Inegalitatii geometrice intr-un n- simplex

Prof. Nicusor Zlota, Focsani

In cele ce urmeaza voi pune in evident cateva inegalitatii geometrice intr-un n – simplex, pentru aceasta vom utiliza urmatoarele notatii referitoare la elementele unui n – simplex, anume

Se stie ca intr-un n-simplex avem urmatoarele relatii

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} = \frac{1}{r}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} = \frac{n-2}{r}, h_i = \frac{nV}{S_i}, r = \frac{nV}{S}, r_i = \frac{nV}{S-2S_i}$$

,unde r_i,h_i -, i=1,2,…,n – inaltimile si razele sferelor exinscrise simplexului, r-raza sferei inscrise, S-aria totala,S_i –aria unei fete, V-volumul.

In continuare vom demonstra urmatorul rezultat.

Lema

Fie $x_i \in R_+^*$ Să demonstreze inegalitatea.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \geq (n+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Demonstratie.

<u>1.Vom demonstra mai intai :</u>

Fie m_a,m_g,m_h – mediile aritmetica, geometrica şi armonica a numerelor reale pozitive $x_i \in R_+^*$

Vom arăta că :

$$m_a^{\,n-1}.m_h \geq m_g^n \qquad (1)$$

Înlociund cu formule cunoscute şi ţinând seana de faptul că $m_a \geq m_g \geq m_h$ (*), deducem

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^{n-1} . \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i$$

şi după efectuarea calculelor obţinem

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n})^{n-1} . \frac{n\prod_{i=1}^{n} x_i}{\sum x_1 x_2 x_3 \ldots . x_{n-1}} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum x_1 x_2 x_3 \ldots . x_{n-1} \leq \frac{n}{n^{n-1}} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}$$

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

, ceea ce reprezinta inegalitatea mediilor generalizate sau inegalitatea lui *MacLaurin* , deci inegalitatea (1) este demonstrată

<u>2.Inegalitatea din enuţ devine</u>

În continuare aplicând inegalitatea dintre media aritmetica şi geometrica şi ţinând seama de (1) , respectiv (*), obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \geq (n+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = nm_a + m_h \geq (n+1)\sqrt[n+1]{m_a^n m_h} = (n+1)\sqrt[n+1]{m_a(m_a^{n-1}m_h)} \geq \left(1\right)(n+1)\sqrt[n+1]{m_a m_g^n} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{m_g^{n+1}} = (n+1)m_g$$

q.e.d

Aplicatii

A1. Sa se arate ca intr-un simplex are loc inegalitatiile, folosind notatiile de mai sus

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i} \geq n^2 r$$

A2. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} \geq n^2 r / n-2$

A3. $\prod_{i=1}^{n} h_i \geq (\frac{1}{nr})^n$

A4. $\prod_{i=1}^{n} r_i \geq (\frac{nr}{n-2})^n$

A5. $\sum_{i=1}^{n} h_i + nr \geq (n+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} h_i}$

A6. $\sum_{i=1}^{n} r_i + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}} \geq (n+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} r_i}$

A7. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i} + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \leq \frac{(n+1)}{nr}$

A8. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} r_i} \leq \frac{(n+1)(n-2)}{nr}$

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

A9.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i^m}\le n^{m-1}\frac{1}{r^m}$$

A10

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i^m}\le n^{m-1}(\frac{n-2}{r})^m,\ m\in N$$

A11.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{h_i}\ge\frac{n^2}{n-2}$$

A12.

$$\sum_{I=1}^{n}\frac{r_i+r}{r_i-r}\ge n(n-1)$$

A13.

$$\sum_{I=1}^{n}\frac{r_i-r}{r_i+r}\ge\frac{n}{n-1}$$

A14.

$$\sum_{I=1}^{n}\frac{h_i-r}{h_i+r}\ge\frac{n(n-1)}{n+1}$$

A15.

$$\sum_{i=1}^{n}S_i\sum_{i=1}^{n}h_i\ge 3n^2V$$

A16

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{r_i}\ge n^2(n-2)$$

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

A17

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i^p}{r_i^m} \geq n^{2+p-m} (n-2)^m r^{p-m}, p, m \geq 1$$

Bibliografie

1.D.S Mitronovic .J.E.Pecaric, -Recent Geometric inequality ,Kluwer, Boston ,London , 1989

Revista Virtuala Info MateTehnic ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

PROBLEME DE TEORIA NUMERELOR LA CONCURSURI ŞI OLIMPIADE

Corneliu Mănescu-Avram Nicuşor Zlota

Lucrarea prezentata la Conferinta Anuala a SSMR din Romania, Ploiesti, 19-21 octombrie 2012

Abstract. This paper contains some number theory problems from mathematical olympiads. Almost all solutions are original. The books from references present both theory and practice problems.

Keywords : number theory, divisibility, prime numbers, perfect squares, arithmetic functions, diophantine equations

MSC : 11A07, 11A41, 11A25, 11D41

Problemele de teoria numerelor de la concursuri şi olimpiade sunt printre cele mai dificile. Cu toate acestea, programa şcolară de la noi nu conţine suficiente informaţii despre acest domeniu, candidaţii fiind constrânşi de aceea să se pregătească mai degrabă ca nişte autodidacţi. Există referinţe bibliografice excelente, dar sunt foarte puţine (cele notate cu asterisc) accesibile şi în limba română şi acestea sunt greu de găsit.

Lucrările [7], [9], [12], [13, [14], [17], [18] conţin probleme cu diverse grade de dificultate, teoria (relativ) elementară este prezentată în [1], [2], [4], [5], [6], [8], [11], restul lucrărilor fiind mult mai avansate. Site-ul [20] este o sursă inepuizabilă de probleme, care sunt date însă fără soluţii. Am ales de aici problemele pentru acest material, pe care l-am structurat în cinci capitole, fiecare capitol conţinând câte cinci probleme de concurs, în ordine cronologică. Materialul are, evident, doar un rol ilustrativ, subiectul extrem de vast nu permite o tratare succintă. Doritorii pot consulta bibliografia sau îşi pot redacta propriile materiale, folosind site-ul [20].

1. Divizibilitate

1. Să se arate că pentru orice număr natural $n > 1$ avem $(n-1)^2 | n^{n-1} - 1$. (*Belgia, 2001*)

Soluţie : Se dezvoltă cu binomul lui *Newton* :

$$n^{n-1} - 1 = -1 + (1 + n - 1)^{n-1} = (n-1)C_{n-1}^1 + (n-1)^2 C_{n-1}^2 + \cdots + (n-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}.$$

Din $C_{n-1}^1 = n - 1$, rezultă că toţi termenii sumei se divid cu $(n-1)^2$, deci şi suma lor se divide cu $(n-1)^2$.

2. Să se demonstreze că pentru orice număr natural impar $n > 1$, avem $8n + 4 | C_{4n}^{2n}$.

(*Indonezia, test 2009*)

Soluţie : Arătăm că numărul C_{4n}^{2n} este divizibil cu $2n + 1$ şi cu 4.

Divizibilitatea cu $2n + 1$: egalitatea

$$2nC_{4n}^{2n} = (2n+1)C_{4n}^{2n-1}$$

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

arată că numărul $2n + 1$ divide membrul stâng, deci divide C_{4n}^{2n}, deoarece $2n + 1$ şi $2n$ sunt prime între ele.

Divizibilitatea cu 4 : exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui $n!$ este

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots .$$

Trebuie deci să demonstăm că

$$2n + n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots - 2\left(n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots\right) =$$

$$= n - \left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots\right) \geq 2,$$

adică

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots \leq n - 2.$$

Dacă $n = 2^s$, $s \in \mathbb{N}$, atunci exponentul lui 2 în descompunerea lui $n!$ are valoarea maximă,

$$2^{s-1} + 2^{s-2} + 2^{s-3} + \dots + 1 = 2^s - 1 = n - 1,$$

deoarece toate fracţiile din paranteze sunt numere naturale.

Pentru n impar, acest exponent este cel mult $n - 2$, ceea ce trebuia demonstrat.

3. Să se determine toate numerele naturale nenule n astfel încât $5^n - 1$ poate fi scris ca produsul unui număr par de numere întregi consecutive. (*Africa de Sud*, *2010*)

Soluţie : Numărul de factori ai lui $5^n - 1$ este cel mult patru, deoarece în caz contrar unul dintre factori se divide cu 5, contradicţie.

Dacă există doi factori, atunci

$$5^n - 1 = m(m+1),$$

cu $m \in \mathbb{Z}$. Pentru $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ (mod 5), membrul drept este congruent modulo 5 respectiv cu 0, 2, 1, 2, 0, iar membrul stâng este totdeauna congruent cu 4 modulo 5, deci egalitatea este imposibilă.

Dacă există patru factori, atunci

$$5^n = m(m+1)(m+2)(m+3) + 1 = (m^2 + 3m + 1)^2,$$

cu $m \in \mathbb{Z}$, aşadar n este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

$$m^2 + 3m + 1 = 5^k.$$

Această ecuaţie are soluţiile

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{5(1 + 4 \cdot 5^{k-1})}}{2}.$$

Pentru $k > 1$, discriminantul $5(1 + 4 \cdot 5^{k-1})$ este divizibil cu 5, dar nu este divizibil cu 25, deci nu poate fi un pătrat perfect. Rezultă $k = 1$, deci $n = 2$ şi $m = 1$, cu soluţia unică

$$5^2 - 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

4. Cifrele zecimale *a, b, c* satisfac : $37|(a0a0\ldots a0b0c0c\ldots 0c)_{10}$, unde există 1001 de *a* şi 1001 de *c*. Să se demonstreze că $b = a + c$. (*Lituania, 2010*)

Soluţie : Avem $10^3 - 1 = (10 - 1)(10^2 + 10 + 1) \equiv 0$ (mod 37).

Numărul dat are $2 \cdot 2 \cdot 1001+1 =$ 4005 cifre zecimale şi se scrie astfel :

$$(10^{4004} + \ldots + 10^{2004})a + 10^{2002}b + (10^{2000} + \ldots + 1)c.$$

Calculăm restul împărţirii acestui număr la 37. În fiecare paranteză suma a trei termeni consecutivi este nulă (mod 37), aşadar numărul este congruent modulo 37 cu

$$(1 + 10^2)(a + c) + 10b = (1 + 10 + 10^2)(a + c) + 10(b - a - c),$$

deci $b - a - c$ se divide cu 37. Avem însă $-18 \le b - a - c \le 9$, deci $b - a - c = 0$.

5. Şirul (a_n) este definit prin $a_1 = 1,\ a_n = n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}), \forall n > 1.$

a) Să se demonstreze că a_n se divide cu $n!$, pentru orice număr natural *n* par.

b) Să se determine toate numerele naturale impare *n* pentru care a_n se divide cu $n!$

(*Albania, 2011*)

Soluţie : Demonstrăm prin inducţie matematică egalitatea $a_n = \frac{n \cdot n!}{2},\ \forall n > 1.$

Avem $a_2 = 2a_1 = 2 = \frac{2 \cdot 2!}{2}$. Presupunem că egalitatea este adevărată pentru $n = 3, 4, \ldots, k - 1$ şi o demonstrăm pentru $n = k$. Într-adevăr, din $n \cdot n! = (n + 1)! - n!$, rezultă

$$a_k = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) = k\left(1 + \frac{3! - 2!}{2} + \cdots + \frac{k! - (k-1)!}{2}\right) =$$

$$= k\left(1 - \frac{2!}{2} + \frac{k!}{2}\right) = \frac{k \cdot k!}{2}.$$

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

ceea ce încheie demonstraţia prin inducţie.

a) Dacă n este par, atunci $\frac{a_n}{n!} = \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, deci a_n se divide cu n!

b) Dacă $n > 1$ este impar, atunci $\frac{a_n}{n!} = \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$. Se deduce că dacă n este impar şi a_n se divide cu $n!$, atunci $n = 1$.

2. Numere prime

6. Să se demonstreze că dacă numărul $5^n + 3^n + 1$ este prim, atunci n se divide cu 12.

(*Italia, 2002*)

Soluţie : Dacă n este impar, atunci $5^n + 3^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \equiv 0$ (mod 3).

Dacă $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $5^n + 3^n + 1 \equiv 9^{2k+1} + 1 \equiv (-1)^{2k+1} + 1 \equiv 0$ (mod 5).

Din mica teoremă a lui *Fermat*, rezultă $5^6 \equiv 3^6 \equiv 1$ (mod 7).

Dacă $n = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $5^n + 3^n + 1 \equiv 5^2 + 3^2 + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0$ (mod 7).

Dacă $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $5^n + 3^n + 1 \equiv 5^4 + 3^4 + 1 \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0$ (mod 7).

Prin urmare, dacă numărul $5^n + 3^n + 1$ este prim, atunci $n = 12k$, $k \in \mathbb{N}$.

7. Să se arate că dacă numerele $p, 3p + 2, 5p + 4, 7p + 6, 9p + 8, 11p + 10$ sunt prime, atunci numărul $6p + 11$ este compus. (*Cehia-Slovacia, 2009*)

Soluţie : Dacă $p = 2$, atunci $3p + 2 = 8$ nu este prim; dacă $p = 3$, atunci $7p + 6 = 27$ nu este prim; dacă $p = 5$, atunci $11p + 10 = 65$ nu este prim.

Dacă $p \equiv 1$ (mod 30), atunci $3p + 2 \equiv 5$ (mod 30).

Dacă $p \equiv 7$ (mod 30), atunci $5p + 4 \equiv 9$ (mod 30).

Dacă $p \equiv 11$ (mod 30), atunci $3p + 2 \equiv 5$ (mod 30).

Dacă $p \equiv 13$ (mod 30), atunci $5p + 4 \equiv 9$ (mod 30).

Dacă $p \equiv 17$ (mod 30), atunci $7p + 6 \equiv 5$ (mod 30).

Dacă $p \equiv 19$ (mod 30), atunci $5p + 4 \equiv 9$ (mod 30).

Dacă $p \equiv 23$ (mod 30), atunci $9p + 8 \equiv 5$ (mod 30).

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Se deduce $p \equiv 29$ (mod 30), de unde $6p + 11 \equiv 5$ (mod 30), aşadar acest număr nu este prim, fiind divizibil cu 5.

8. Fie p un număr prim şi a, b, c numere întregi astfel încât

$$6|p+1, \quad p|a+b+c, \quad p|a^4+b^4+c^4.$$

Să se demonstreze că $p|a, b, c.$ (*Calea Baltică, 2009*)

Soluţie : Demonstrăm mai întâi două leme.

Lema 1. Dacă $p \equiv 5$ (mod 6) este un număr prim, atunci $3^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}$ (mod p).

Demonstraţie : Fie $p = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}^*$. Considerăm produsul primelor $3k + 2$ numere naturale care se divid cu 3 şi repartizăm factorii acestui produs în trei grupe care au respectiv k, $k + 1$ şi $k + 1$ factori.

Factorii primei grupe dau produsul $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot ... \cdot 3k$.

Factorii grupei a doua, scrişi în ordine inversă ne dau

$$(6k+3) \cdot 6k \cdot (6k-3) \cdot ... \cdot (3k+3) = (p-2)(p-5)(p-8) ... [p-(3k+2)] \equiv$$

$$\equiv (-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot ... \cdot (3k+2) \text{ (mod } p).$$

Factorii grupei a treia dau produsul

$$(6k+6)(6k+9)(6k+12) ... (9k+6) = (p+1)(p+4)(p+7) ... (p+3k+1) \equiv$$

$$\equiv 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3k+1) \text{ (mod } p).$$

Produsul tuturor numerelor considerate este $3 \cdot 6 \cdot ... \cdot (9k+6) = (3k+2)! \cdot 3^{3k+2}$.

Pe de altă parte, acest produs este congruent modulo p cu

$$3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot ... \cdot 3k \cdot (-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot ... \cdot (3k+2) \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3k+1) \equiv (-1)^{k+1}(3k+2)!$$

Dar $(3k+2)!$ nu se divide cu p, deoarece factorii produsului sunt numere naturale nenule mai mici decât p, aşadar

$$3^{3k+2} \equiv (-1)^{k+1} \text{(mod } p),$$

de unde

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \text{ (mod } p).$$

Lema 2. Dacă $p \equiv 5$(mod 6) este un număr prim, atunci ecuaţia $x^2 + \hat{3} = \hat{0}$ nu are soluţii în $\mathbb{Z}_p$.

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Demonstraţie : Presupunem că există $x \in \mathbb{Z}_p$ astfel ca $x^2 + \hat{3} = \hat{0}$. Din teorema lui *Fermat* rezultă $(x^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} = \hat{1}$. Pe de altă parte, din lema 1 se obţine

$$(-\hat{3})^{\frac{p-1}{2}} = (\widehat{-1})^{\frac{p-1}{2}} \cdot \hat{3}^{\frac{p-1}{2}} = (\widehat{-1})^{\frac{p-1}{2}} \cdot (\widehat{-1})^{\frac{p+1}{2}} = -\hat{1},$$

contradicţie.

Revenim la problemă şi considerăm polinomul unitar $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ care are rădăcinile $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ în $\mathbb{Z}_p$. Trebuie să arătăm că $f = X^3$. Notăm $s_k = a^k + b^k + c^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $f = X^3 + uX^2 + vX + w$. Avem

$$u = -\widehat{s_1} = \hat{0}.$$

Scriem că polinomul f are rădăcinile $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$, înmulţim fiecare egalitate respectiv cu $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$, adunăm cele trei egalităţi şi obţinem

$$\widehat{s_4} + v\widehat{s_2} + w\widehat{s_1} = \hat{0}.$$

Din $\widehat{s_1} = \widehat{s_4} = \hat{0}$ se deduce $v\widehat{s_2} = \hat{0}$, deci $v = \hat{0}$ sau $\widehat{s_2} = \hat{0}$ ($\mathbb{Z}_p$ este un corp).

Dacă $\widehat{s_2} = \hat{0}$, atunci $\hat{2}v = \widehat{s_1^2} - \widehat{s_2} = \hat{0}$, deci $v = \hat{0}$. Polinomul f este aşadar de forma $f = X^3 + w$ şi trebuie să arătăm că $w = \hat{0}$.

Dacă $\hat{a} = \hat{0}$, atunci $w = -\widehat{abc} = \hat{0}$. Dacă $\hat{a} \neq \hat{0}$, atunci $w = -\widehat{a^3}$, deci $f = X^3 - \widehat{a^3}$. Înmulţim cu inversul lui $\widehat{a^3}$ şi deducem că polinomul $g = X^3 - \hat{1} = (X - \hat{1})(X^2 + X + \hat{1})$ are trei rădăcini în $\mathbb{Z}_p$, deci polinomul $h = (\hat{2}X + \hat{1})^2 + \hat{3}$ are două rădăcini în $\mathbb{Z}_p$, ceea ce contrazice însă lema 2.

Rezultă $w = \hat{0}$, deci $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{0}$.

Notă. Lema 2 exprimă faptul că -3 este nonrest pătratic modulo p, dacă p este un număr prim congruent cu 5 modulo 6. Acest rezultat este o consecinţă a legii reciprocităţii pătratice (*Gauss*), care depăşeşte însă cadrul elementar. O altă variantă de demonstraţie, pe care o prezentăm în continuare, foloseşte metoda "coborârii infinite" (*Fermat*).

Fie p cel mai mic număr prim congruent cu 5 modulo 6 pentru care congruenţa

$$x^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

are soluţie. În acest caz există o soluţie e, cu $0 < e < p$ şi putem alege e par, altfel înlocuim e cu $p - e$, care este de asemenea soluţie a congruenţei.

Revista Virtuala Info MateTehnic ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Cazul 1. $e^2 \equiv 1$ (mod 3). Din $e^2 \equiv -3$(mod p), rezultă $e^2 = -3 + fp$, cu $f < p$ impar. Se deduce $fp = e^2 + 3 \equiv 4$(mod 3), iar din $p \equiv 2$(mod 3), rezultă $f \equiv 2$(mod 3).

Numărul f este impar şi este de forma $3n + 2$, deci el are un divizor prim impar q de forma $3n + 2$, în caz contrar, dacă toţi divizorii primi ai lui f ar fi de forma $3n + 1$, atunci şi f ar fi de aceeaşi formă.

Din $e^2 \equiv -3$(mod f), se deduce $e^2 \equiv -3$(mod q), ceea ce contrazice însă minimalitatea lui p pentru care -3 este rest pătratic.

Cazul 2. $e^2 \equiv 0$ (mod 3). Fie $e = 3^\alpha k$, $k \not\equiv 0$(mod 3). Din

$$e^2 \equiv 3^{2\alpha}k^2 \equiv -3(\text{mod } p),$$

se deduce $3^{2\alpha-1}k^2 \equiv -1$(mod p), sau $3^{2\alpha-1}k^2 + 1 = hp$, cu $h < p$ număr impar. Avem astfel $hp \equiv 1$(mod 3), iar din $p \equiv 2$(mod 3), se obţine $h \equiv 2$(mod 3). Numărul h este impar şi este de forma $3n + 2$, deci are un divizor prim r de forma $3n + 2$. Din $3^{2\alpha-1}k^2 \equiv -1$(mod r), rezultă

$$3^{2\alpha}k^2 = (3^\alpha k)^2 \equiv -3(\text{mod } r),$$

ceea ce contrazice din nou minimalitatea lui p.

Am demonstrat astfel că dacă $p \equiv 5$(mod 6), atunci -3 este nonrest pătratic modulo p.

9. Se consideră şirul (a_n) definit prin $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ şi numărul prim $p \equiv 3$ (mod 4) astfel încât $p | a_{2011} + 1$. Să se arate că $p = 3$. (*Turcia, 2011*)

Soluţie : Se arată simplu că $a_n > 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Scriem egalitatea de definiţie a şirului sub forma echivalentă

$$a_{n+1} - 2 = a_n^2(a_n - 2),$$

dăm indicelui valorile 1, 2, ... , n, înmulţim cele n egalităţi, simplificăm cu $(a_2 - 2) \dots (a_n - 2)$ şi deducem

$$a_{n+1} - 2 = (a_1 - 2)a_1^2 \dots a_n^2,$$

de unde

$$a_{2011} + 1 = 3(a_1^2 \dots a_{2010}^2 + 1).$$

Dacă $p \neq 3$ este un număr prim, $p \equiv 3$ (mod 4) şi p divide $a_{2011} + 1$, atunci există $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x^2 + 1 \equiv 0$ (mod p). Din teorema lui *Fermat,* rezultă

$$(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod } p).$$

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Pe de altă parte, $p = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$, deci

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1,$$

de unde $1 \equiv -1$ (mod p), contradicţie.

10. Să se găsească toate numerele prime p astfel încât $p + 2$ şi $p^2 + 2p - 8$ sunt numere prime.

(*Albania, 2012*)

Soluţie : Dacă $p^2 + 2p - 8 = (p-2)(p+4)$ este prim, atunci $p - 2 = 1$, deci $p = 3$.

În acest caz numerele $p + 2 = 5$ şi $p^2 + 2p - 8 = 7$ sunt prime.

3. Pătrate perfecte

11. Fie n, p numere întregi astfel încât $n > 1$ şi p este prim. Să se arate că dacă $n|p-1$ şi $p|n^3 - 1$, atunci $4p - 3$ este un pătrat perfect. (*Argentina, test 2005*)

Soluţie : Din $n|p-1$, rezultă $p - 1 \geq n$. Din $p|n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$, rezultă

$$n^2 + n + 1 = pm,\ m \in \mathbb{N}.$$

Din $n|p-1$, rezultă $p \equiv 1$ (mod n) şi $pm \equiv m$ (mod n). Se obţine $m \equiv 1$(mod n).

Fie $= un + 1, m = vn + 1,\ u, v \in \mathbb{N}$. Avem

$$(un+1)(vn+1) = n^2 + n + 1,$$

deci

$$uvn + u + v = n + 1.$$

Dacă $v \geq 1$, atunci $uvn + u + v \geq n + 2 > n + 1$. Rezultă $v = 0$, $m = 1$, $p = n^2 + n + 1$, deci

$$4p - 3 = (2n+1)^2$$

este un pătrat perfect.

12. Diferenţa cuburilor a două numere naturale consecutive este egală cu pătratul unui număr natural n. Să se demonstreze că n este suma a două pătrate perfecte. (*Olimpiada nordică, 2008*)

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Soluţie : Fie $(m+1)^3 - m^3 = n^2$. Se deduce

$$3(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1).$$

Numerele $2n-1$ şi $2n+1$ sunt prime între ele (deoarece sunt impare), deci unul dintre ele este pătratul unui număr impar, iar celălalt este pătratul unui număr impar înmulţit cu 3.

Din prima egalitate rezultă că *n* este impar, $n = 2k+1$, deci $2n+1 = 4k+3$, care nu poate fi pătrat perfect, deoarece pătratele modulo 4 sunt 0 şi 1. Avem aşadar $2n-1 = (2a+1)^2$, deci

$$n = a^2 + (a+1)^2.$$

13. Fie *a, b, c* numere întregi care satisfac $ab+bc+ca = 1$. Să se demonstreze că $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ este un pătrat perfect. (*Ucraina, 2009*)

Soluţie : Cel puţin unul dintre numerele $a+b, b+c, c+a$ este nenul, altfel $a = b = c = 0$, ceea ce contrazice ipoteza.

Presupunem $a+b \neq 0$ şi deducem $c = \frac{1-ab}{a+b} \in \mathbb{Z}$, astfel că

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (1+a^2)(1+b^2)\left[1+\left(\frac{1-ab}{a+b}\right)^2\right] =$$

$$= \left[\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a+b}\right]^2$$

este pătratul unui număr natural.

14. Fie *n* un număr natural nenul astfel încât $2n+1$ şi $3n+1$ sunt pătrate perfecte. Să se arate că $5n+3$ este un număr compus. (*India, 2011*)

Soluţie : Fie $2n+1 = a^2$, $3n+1 = b^2$, aşadar $5n+3 = 4(2n+1) - (3n+1) = 4a^2 - b^2 =$

$= (2a-b)(2a+b)$. Egalitatea $2a - b = 1$ este imposibilă, în caz contrar $5n+3 = 2b+1$, de unde

$$n = \frac{b^2-1}{3} = \frac{2b-2}{5}.$$

Se obţine ecuaţia $5b^2 - 6b + 1 = 0$, cu soluţia număr natural $b = 1$, dar atunci $n = 0$, ceea ce contrazice ipoteza.

Rezultă că numărul $5n+3$ este compus.

15. Un număr natural *n* este ales strict între două pătrate perfecte consecutive. Cel mai mic dintre cele două pătrate se obţine scăzând *k* din *n*, iar cel mai mare adunând *l* la *n*. Să se demonstreze că $n - kl$ este un pătrat perfect. (*India, 2011*)

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Soluţie : Fie $a \in \mathbb{N}$ şi $a^2 < n < (a+1)^2$. Atunci $k = n - a^2$ şi $l = (a+1)^2 - n$, de unde

$$n - kl = n + (a^2 - n)[(a+1)^2 - n] = [a(a+1)]^2 - n(2a^2 + 2a + 1) + n^2 + n =$$

$$= [a(a+1)]^2 - 2na(a+1) + n^2 = (a^2 + a - n)^2,$$

aşadar numărul $n - kl$ este un pătrat perfect.

4. Funcţii aritmetice

16. Fie $p_1, p_2, \dots, p_n$ numere prime distincte mai mari decât 3. Să se arate că $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ are cel puţin 4^n divizori. (*OIM, lista scurtă 2002*)

Soluţie : Dacă *a, b* sunt numere naturale impare prime între ele, atunci $(2^a + 1, 2^b + 1) = 1$. Într-adevăr, fie $d = (2^a + 1, 2^b + 1)$. Avem $3 | 2^a + 1$ şi $3 | 2^b + 1$. Pe de altă parte, din

$$(2^{2a} - 1, 2^{2b} - 1) = 2^{(2a, 2b)} - 1 = 2^2 - 1 = 3,$$

rezultă $d | 3$, aşadar *d* = 3.

Dacă *b* nu se divide cu 3, atunci $2^b + 1$ nu se divide cu 9, astlef că numerele $2^a + 1$ şi $\frac{2^b + 1}{3}$ sunt prime între ele. Numărul $2^{ab} + 1$ este divizibil cu $2^a + 1$ şi $2^b + 1$, deci este divizibil cu $\frac{(2^a + 1)(2^b + 1)}{3}$.

Se demonstrează afirmaţia din enunţ prin inducţie după *n*.

Pentru *n* = 1, numărul $2^{p_1} + 1$ se divide cu 3 şi este mai mare decât 3^2, deci el are cel puţin 4 divizori.

Presupunem că $2^a + 1 = 2^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} + 1$ are cel puţin 4^{n-1} divizori şi considerăm numărul $A = 2^{ab} + 1 = 2^{p_1 \cdots p_n} + 1$, cu $b = p_n$. Numerele $2^a + 1$ şi $\frac{2^b + 1}{3}$ sunt prime între ele, deci numărul $B = \frac{(2^a + 1)(2^b + 1)}{3}$ are cel puţin $2 \cdot 4^{n-1}$ divizori. Numărul *A* se divide cu *B* şi este mai mare decât B^2. Dacă $d | B$, atunci *d* şi $\frac{A}{d}$ sunt divizori ai lui *A*, deci *A* are cel puţin 4^n divizori, ceea ce încheie demonstraţia prin inducţie.

Notă. Se poate arăta că $2^{p_1 \cdots p_n} + 1$ are cel puţin $2^{2^{n-1}}$ divizori.

17. Să se demonstreze că dacă suma tuturor divizorilor pozitivi ai lui $n \in \mathbb{Z}^+$ este o putere a lui 2, atunci şi numărul divizorilor lui *n* este o putere a lui 2. (*Olimpiada Europei Centrale, 2008*)

Soluţie : Suma divizorilor unui număr natural *n* este un produs de factori de forma

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^a,$$

unde p^a este cea mai mare putere a numărului prim *p* care divide pe *n*. Toţi aceşti factori trebuie să fie puteri ale lui 2. Această sumă este un număr par numai dacă *p* şi *a* sunt numere impare.

Suma de mai sus se divide în acest caz cu 1 + *p*, deci 1 + *p* este putere a lui 2, adică *p* este număr prim *Mersenne.* Se arată în continuare că *a* = 1. Într-adevăr, pentru *a* > 1 impar, avem

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^a = (1+p)(1 + p^2 + p^4 + \cdots p^{a-1}).$$

Ca mai sus, $\frac{a-1}{2}$ este impar, dar atunci a doua paranteză se divide cu 1 + p^2. Dacă *p* este un număr prim *Mersenne*, atunci 1 + p^2 are un factor impar mai mare decât 1, deci nu poate fi putere a lui 2.

Am demonstrat astfel că dacă suma divizorilor lui *n* este o putere a lui 2, atunci *n* este produs de numere prime *Mersenne* distincte.

Dacă $n = p_1 \dots p_k$ este produs de numere prime distincte (nu neapărat *Mersenne*), atunci numărul divizorilor lui *n* este egal cu 2^k, ceea ce trebuia demonstrat.

18. Fie $\tau(n)$ numărul divizorilor pozitivi ai numărului natural nenul *n*. Se defineşte şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel :

$$a_n = \begin{cases} 0, dacă \ \ \tau(n) \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ 1, dacă \ \ \tau(n) \ \equiv 0 \ (mod\ 2) \end{cases}.$$

Să se stabilească dacă numărul $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ este raţional. (*India, 2009*)

Soluţie : Se arată că numărul *x* este iraţional.

Presupunem că *x* este raţional. În acest caz şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este periodic, deci există numerele naturale nenule *k, l* astfel ca $a_n = a_{n+l}$ pentru orice $n \geq k$. Se alege *m* astfel ca $ml \geq k$ şi *ml* să fie pătrat perfect. Fie

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}, \qquad n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r},$$

descompunerile în produse de factori primi ale lui *m* şi *n*, astfel că $\alpha_j + \beta_j$ este par pentru orice *j*, $1 \leq j \leq r$. Se alege un număr prim *p* diferit de $p_1, p_2, \dots, p_r$ şi se consideră numerele *ml* şi *pml*. Numărul $pml - ml$ se divide cu *l*, deci $a_{pml} = a_{ml}$. Numerele $\tau(pml)$ şi $\tau(ml)$ au aşadar aceeaşi paritate. Dar $\tau(pml) = 2\tau(ml)$, deoarece $(p, ml) = 1$ şi *p* este prim.

Numărul $\tau(ml)$ este impar, deoarece $\tau(ml)$ este pătrat perfect. Numărul $\tau(pml)$ este par astfel că $a_{pml} \neq a_{ml}$, contradicţie.

19. O funcţie $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, unde $\mathbb{Z}_+$ este mulţimea numerelor întregi strict pozitive, este nedescrescătoare şi satisface $f(mn) = f(m)f(n)$ pentru toate numerele naturale *m, n* prime între ele. Să se demonstreze că $f(8)f(13) \geq (f(10))^2$. (*Olimpiada nordică, 2010*)

Soluţie : Funcţia f este nedescrescătoare, deci $f(91) \geq f(90)$, de unde, prin descompunere în factori, se obţine $f(7)f(13) \geq f(9)f(10)$.

Similar, din $f(72) \geq f(70)$ se deduce $f(8)f(9) \geq f(7)f(10)$. Toate valorile sunt strict pozitive, aşadar prin înmulţire se obţine

$$f(7)f(8)f(9)f(13) \geq f(7)f(9)(f(10))^2,$$

de unde, prin simplificare cu $f(7)f(9) > 0$, rezultă

$$f(8)f(13) \geq (f(10))^2.$$

Notă. Dacă o funcţie are proprietăţile din enunţ, atunci ea este o funcţie putere, adică există $k \in \mathbb{Z}_+$ astfel ca $f(n) = n^k$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}_+$. Acest fapt a fost demonstrat de *Paul Erdös*. Folosind acest rezultat, problema devine banală.

20. Pentru orice număr natural nenul *n*, fie $f(n)$ numărul divizorilor lui *n* care au ultima cifră 1 sau 9 în baza 10 şi $g(n)$ numărul divizorilor lui *n* care au ultima cifră 3 sau 7 în baza 10. Să se demonstreze că $f(n) \geq g(n)$, pentru orice număr natural nenul *n*. (*Elveţia, 2011*)

Prima soluţie : Se consideră funcţia

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0,2,4,5,6,8 \pmod{10} \\ 1, & n \equiv 1,9 \pmod{10} \\ -1, & n \equiv 3,7 \pmod{10} \end{cases}.$$

Funcţia *h* este multiplicativă, ceea ce rezultă direct din definiţie. Se calculează $S = \sum_{d|n} h(d)$.
Divizorii pari sau care sunt multipli de 5 nu modifică valoarea sumei, divizorii de forma $10k + 1$ sau $10k + 9$ adaugă 1, divizorii de forma $10k + 3$ sau $10k + 7$ scad 1. Se arată că această sumă este pozitivă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ descompunerea canonică a lui *n*. Funcţia *h* este multiplicativă, deci suma valorilor ei extinsă asupra tuturor divizorilor lui *n* este un produs de factori de forma

$$N_p = 1 + h(p) + h(p^2) + h(p^3) + \dots + h(p^\alpha),$$

unde *p* este un divizor prim oarecare al lui *n*.

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Dacă $p \equiv 1, 9$ (mod 10), atunci $N_p = 1 + 1 + \cdots + 1 = \alpha + 1$.

Dacă $p \equiv 3, 7$ (mod 10), atunci $N_p = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ este egal cu 0 sau 1.

În toate cazurile N_p este pozitiv, deci şi $S = \prod_{p|n} N_p$ este pozitivă.

Din $S = f(n) - g(n)$, rezultă $f(n) \geq g(n)$.

A doua soluţie : Demonstrăm afirmaţia prin inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $n = p^a$, $a \in \mathbb{N}$, atunci

pentru $p \equiv 1, 9$(mod 10) avem $f(n) = a + 1, g(n) = 0$, deoarece ultima cifră a divizorilor lui n este 1, 1, 1, 1, ... sau 1, 9, 1, 9, ... ;

pentru $p \equiv 3, 7$(mod 10) avem $f(n) = g(n) = \frac{a+1}{2}$, dacă a este impar şi $f(n) = \frac{a}{2} + +1, g(n) = \frac{a}{2}$, deoarece ultima cifră a divizorilor lui n este 1, 3, 7, 9, 1, 3, 7, 9, ... , respectiv 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, ...

În toate cazurile se verifică inegalitatea $f(n) \geq g(n)$.

Fie $n = st$, s, $t \in \mathbb{N}^*$, $(s, t) = 1$. Presupunem inegalitatea din enunţ adevărată pentru s şi t şi arătăm că ea este adevărată şi pentru $n = st$. Fie $d_k(n)$ numărul divizorilor pozitivi ai numărului natural n care au ultima cifră zecimală egală cu k. Definim funcţia $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$,

$$h(n) = f(n) - g(n) = d_1(n) - d_3(n) - d_7(n) + d_9(n)$$

şi arătăm că toate valorile acestei funcţii sunt pozitive.

Înmulţirea resturilor modulo 10 este dată în următorul tabel :

*	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

De aici se deduc simplu egalităţile

$$d_1(n) = d_1(s)d_1(t) + d_3(s)d_7(t) + d_7(s)d_3(t) + d_9(s)d_9(t),$$

$$d_3(n) = d_1(s)d_3(t) + d_3(s)d_1(t) + d_7(s)d_9(t) + d_9(s)d_7(t),$$

$$d_7(n) = d_1(s)d_7(t) + d_3(s)d_9(t) + d_7(s)d_1(t) + d_9(s)d_3(t),$$

$$d_9(n) = d_1(s)d_9(t) + d_3(s)d_3(t) + d_7(s)d_7(t) + d_9(s)d_1(t).$$

Prin calcul direct se obţine

$$h(st) = h(n) = d_1(n) - d_3(n) - d_7(n) + d_9(n) =$$

$$= \big(d_1(s) - d_3(s) - d_7(s) + d_9(s)\big)\big(d_1(t) - d_3(t) - d_7(t) + d_9(t)\big) = h(s)h(t).$$

Dacă $h(s) \geq 0, h(t) \geq 0$, atunci $h(s)h(t) = h(st) = h(n) = f(n) - g(n) \geq 0$, ceea ce încheie demonstraţia prin inducţie.

5. Ecuaţii diofantice

21. Să se determine toate numerele întregi astfel încât $(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$.

(*Austria, 2004*)

Soluţie : Avem

$$a^4 + b^4 + a^3b^3 + ab = a^4 + b^4 + 4ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2.$$

Su substituţiile $s = a + b, p = ab$, se deduce

$$4p(s^2 - 2p) + 6p^2 = p^3 + p.$$

Dacă $p = 0$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$ şi se obţin soluţiile $(a, 0), (0, b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Dacă $p \neq 0$, simplificăm cu p, restrâgem termenii asemenea şi obţinem

$$4s^2 = (p - 1)^2,$$

de unde $2s = p - 1$ sau $-2s = p - 1$.

Revenind la vechile variabile, prima ecuaţie se scrie $(a - 2)(b - 2) = 3$, cu soluţiile $(-3, -5), (-5, -3), (5, 3), (3, 5)$.

A doua ecuaţie se scrie $(a + 2)(b + 2) = 3$, cu soluţiile $(-1, 1), (1, -1)$ şi alte două soluţii obţinute anterior.

22. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $xy + yz + zx - xyz = 2$.

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

(*Argentina, test 2006*)

Soluţie : Cu substituţiile $x = a+1, y = b+1, z = c+1,$ ecuaţia devine

$$abc = a + b + c.$$

Se arată că singurele soluţii ale acestei ecuaţii sunt $(a,-a,0), (1,2,3), (-1,-2,-3)$, împreună cu toate permutările lor.

Dacă $a+b=0,$ atunci $c = 0$, deoarece sistemul de ecuaţii $a+b=0, ab=1,$ nu are soluţii reale. Se obţine astfel soluţia $(a,-a,0)$, $a \in \mathbb{Z}$.

Dacă $a+b \neq 0,$ atunci $ab \neq 1$ şi

$$c = \frac{a+b}{ab-1}$$

este întreg, deci $|a+b| \geq |ab-1|$. Dacă a şi b au acelaşi semn, atunci schimbând semnele putem considera că ele sunt pozitive, deci $a+b \geq ab-1,$ de unde $(a-1)(b-1) \leq 2,$ aşadar

$1 \leq a \leq 3, 1 \leq b \leq 3.$ Se obţine astfel soluţia $(1,2,3)$ şi prin schimbarea semnelor, soluţia $(-1,-2,-3)$. Dacă a şi b au semne diferite, reluăm raţionamentul cu două dintre numerele *a, b, c,* care au acelaşi semn, cu acelaşi rezultat.

Soluţiile ecuaţiei din enunţ sunt $(1+a, 1-a, 1), a \in \mathbb{Z}$, $(2,3,4)$, $(0,-1,-2)$ şi toate permutările lor.

23. Să se rezolve ecuaţia $x^3 - y^3 = 2xy + 8,\ x, y \in \mathbb{Z}$. (*Lituania, test 2006*)

Soluţie : Se face substituţia $u = x - y, v = xy$. Ecuaţia devine $u^3 + 3uv = 2v + 8,$ de unde

$$v = -\frac{u^3 - 8}{3u - 2}$$

este întreg, deci şi numărul

$$27v = -(3u)^2 - 2(3u) - 2^2 + \frac{8 \cdot 26}{3u - 2}$$

deci $3u - 2$ este divizor al numărului $8 \cdot 26 = 2^4 \cdot 13$.

Sistemul de ecuaţii $u = x - y, v = xy$ conduce prin eliminare la ecuaţia $x^2 - ux - v = 0,$ care are soluţii reale dacă şi numai dacă $u^2 + 4v \geq 0$ este un pătrat perfect. Analizând toate cazurile se deduce că singura pereche care satisface aceste condiţii este $(u,v) = (2,0),$ de unde se obţin soluţiile ecuaţiei iniţiale $(x,y) \in \{(0,-2)(2,\ 0)\}$.

24. Să se găsească o soluţie în numere naturale a ecuaţiei

$$x^2 - 2x - 2007y^2 = 0. \qquad (\textit{Olimpiada nordică, 2007})$$

Soluţie : Ecuaţia se scrie

$$x(x-2) = 223 \cdot (3y)^2.$$

Numărul 223 este prim, deci el divide x sau $x-2$. Dacă $x = 225$, atunci $x(x-2) =$

$= 223 \cdot (3 \cdot 5)^2$, deci $(x, y) = (225, 5)$ este o soluţie a ecuaţiei date.

25. Să se determine toate numerele naturale m, n astfel încât $1 + 5 \cdot 2^m = n^2$.

(*Albania, test 2009*)

Soluţie : Nu există soluţii pentru $m = 0, 1, 2, 3$, deci putem presupune $m \geq 4$. Numărul n este impar, deci este de forma $n = 2^t k + 1$, cu $t \geq 1$. Pentru $k = 0$ nu există soluţie, deci avem şi $k \geq 1$. Din

$$1 + 5 \cdot 2^m = n^2 = (2^t k + 1)^2 = 2^{2t} k^2 + 2^{t+1} k + 1,$$

se deduce

$$5 \cdot 2^m = 2^{2t} k^2 + 2^{t+1} k.$$

Exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a membrului drept este $t + 1$, deci $t + 1 = m$, de unde $5 = 2^{m-2} k^2 + k$, cu soluţia unică $m = 4$, $k = 1$, aşadar $n = 2^3 + 1 = 9$.

Bibliografie

*1. Vinogradov, I. M., Elements of Number Theory, Dover Publications Inc., 1954

*2. Gelfond, A. O., The Solution of Equations in Integers, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1960

3. Baker, Alan, A Concise Introduction to the Theory of Numbers, Cambridge University Press, Cambridge, 1964

4. Andrews, George E., Number Theory, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1971

5. Sierpiński, W., Elementary Theory of Numbers, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1988

6. Niven, Ivan, Zuckerman, Herbert S., Montgomery, Hugh L., An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1991

7. Adler, Andrew, Coury, John E., The Theory of Numbers, A Text and Source Book of Problems, Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachussetts, 1995

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

8. Stark, Harold M., An Introduction to Number Theory, Tenth Printing, The MIT Press, Cambridge, Massachussetts, 1998

9. Engel, Arthur, Problem-Solving Strategies, Springer, 1998

10. Stopple, Jeffrey, A Primer of Analytic Number Theory, Cambridge University Press, 2003

11. Rosen, Kenneth H., Elementary Number Theory and Its Applications, Fifth Edition, Pearson Addison Wesley, Boston, 2005

12. Andreescu, Titu, Andrica, Dorin, Feng, Zuming, 104 Number Theory Problems, From the Training of the USA IMO Team, Birkhäuser, Boston, 2006

13. Gelca, Răzvan, Andreescu, Titu, Putnam and Beyond, Springer, 2007

14. Zeitz, Paul, The Art and Craft of Problem Solving, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2007

15. Davenport, H., The Higher Arithmetic, An introduction to the Theory of Numbers, Eighth Edition, Cambridge University Press, 2008

16. Hardy, G. H., Wright, E. M., Heath-Brown, D. R., Silverman, J. H., An Introductionto the Theory of Numbers, Sixth Edition, Oxford University Press, 2008

17. Rassias, Michael T., Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory, In the Spirit of Mathematical Olympiads, Springer, 2011

18. Djukić, Dušan, Janković, Vladimir, Matić, Ivan, Petrović, Nikola, The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads : 1959-2009, Second Edition, Springer, 2011

19. Schleicher, Dierk, Lackmann, Malte (eds.), An Invitation to Mathematics, From Competitions to Research, Springer, 2011

20. www.mathlinks

Revista Virtuala Info MateTehnic ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Valenţe formative ale metodelor interactive de predare

Prof. Popescu Cristina – Liceul Tehnologic „Dacia” Piteşti

Prin predarea tradiţională în sensul în care profesorul ţine o prelegere, face o demonstraţie, nu se produce învăţare decât în foarte mică măsură, rolul elevilor fiind acela de a urmări, acest lucru fiind insuficient pentru învăţare. Elevii înşişi trebuie să organizeze ceea ce au auzit şi vazut într-un tot ordonat şi plin de semnificaţii. Dacă elevilor nu li se oferă ocazia discuţiei, a investigaţiei, a acţiunii şi eventual a predării, învăţarea nu are loc. Învăţarea presupune înţelegerea, iar aceasta înseamnă mai mult decât cunoaşterea faptelor.

Elevii construiesc cunoşterea pe baza a ceea ce deja cunosc sau cred. . Această construcţie personala este favorizata de interacţiunea cu alţii care la randul lor învaţă.

Adevărata învăţate este aceea care permite transferul achiziţiilor în contexte noi. Este nu doar simplu activă, individual-activă ci interactivă.

Metodele interactive sunt capabile să-l facă pe elev să urmarească cu interes şi curiozitate lecţia , să-i câştige adeziunea logică şi afectivă faţa de cele nou învăţate, care-l determină să-şi pună în joc imaginatia, îngelegerea, puterea de anticipare, memoria. De asemenea, îl ajută să caute, să cerceteze, să găsească singur sau în grup cunoştinţele pe care urmează să şi le înmulţească, să afle soluţii la probleme, să prelucreze cunoştinţe, să ajungă la reconstituri şi resistematizări de cunoştinţe.

Sunt metode care îl învaţă pe elev să înveţe, să lucreze independent şi în grup. Aceste metode plac atât elevilor cât şi dascălilor.

Eficientizarea folosirii lor este condiţionată de măiestria didactică a profesorului, de spiritul său liber, novator ; iar timpul necesar familializării elevilor cu aceste metode este pe deplin compensat de eficienţa lor în planul dezvoltării psihice.

Aceste metode creează deprinderi :

- facilitează învăţarea în ritm propriu;
- sunt atractive;
- pot fi abordate din punct de vedere a diferitelor stiluri de învăţare.

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

- stimulează cooperarea, nu competiţia deoarece învăţarea prin cooperare este o strategie de instruire structurată şi sistematizată în cadrul căreia grupele mici lucrează împreună pentru a atinge un ţel comun.

Se învaţă mai temeinic decât in cazul lucrului individual. Ea solicită toleranţă faţă de modurile diferite de gândire şi simţire. Valorizând nevoia elevilor de a lucra impreună intr-un climat prietenos de susţinere reciprocă

În învaţarea prin cooperare succesul grupului depinde de efortul depus în realizarea sarcinilor de catre toti membri. Elevii sunt dirijati către un scop comun, stimulaţi de o apreciere colectiva, rezultatele fiind suma eforturilor tuturor, fiecare membru al grupului işi asuma responsabilitatea sarcinilor de rezolvat. Aceasta invatare prin cooperare solicita efort intelectual şi practic atat din partea elevilor cat şi din partea profesorului care coordoneaza bunul mers al activitatii.

Profesorul trebuie să-i facă pe elevi să dorească să se implice în activitate, în rezolvarea problemelor date.

Valenţele formativ- educative care recomandă aceste metode interactive ca practici de succes atât pentru învăţare cât şi pentru evaluare sunt următoarele :

- stimuleaza implicarea activă în sarcina a elevilor, aceştia fiind mai conştienţi de responsabilitatea ce-şi asuma.
- exersează capacităţile de analiza şi de luuare a deciziilor oportune la momentul potrivit, stimuland initiativa tuturor elevilor implicati in sarcina.
- asigură o mai bună practică a cunoştinţelor, exersarea priceperilor şi capacitatilor în variate contexte şi situaţii.
- asigură o mai bună clarificare conceptuala şi o integrare uşoara a cunoştintelor asimilate în sistemul naţional, devenind astfel operationale
- unele dintre ele, cum ar fi portofoliu, ofera o perspectiva de ansamblu asupra activitatii elevului pe o perioada mai lunga de timp depasind neajunsurile altor metode traditionale de evaluare cu caracter de sondaj si materie si intre elevi

Pe băncile şcolii, elevii îşi însuşesc un fond de cunoştinţe de bază din toate domeniile ştiinţei şi culturii, un sistem unitar şi cuprinzător de informaţii despre natură, societate şi gândire.

Se ştie că o parte, uneori însemnată, din cunoştinţele predate se pierde după un timp, anumite informaţii rămânând neutilizate, peste ele suprapunându-se apoi altele, apărând adesea interferenţe sau intervenind uitarea. Cota de pierdere este maximă în condiţiile învăţării mecanice. Practic, nu se poate repeta în permanenţă totul şi nici nu se prescrie o asemenea exigenţă şcolii, pentru că ar însemna o risipă inutilă de energie.

Cultura generală a unei persoane - spune o maximă cunoscută - se compune din ceea ce se reţine după ce uitarea şi-a făcut jocul. Este important să cunoaştem ce anume se păstrează după ce a intervenit uitarea.

Cercetările arată însă că, odată cu creşterea volumului materialului de reţinut, procentul păstrării lui în memorie scade. Desigur, în condiţiile memorării logice, cunoştinţele învăţate se pot reconstitui ulterior mai uşor. A fixa în memorie înseamnă a putea deduce rapid la reluare.

Pornind de aici, profesorul la lecţie, trebuie să discernă între ceea ce constituie conţinutul esenţial al disciplinei şi ceea ce poate fi acceptat să fie uitat sau lăsat la o parte. În manualele

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

şcolare, definiţiile şi clasificările ţin un loc mult mai însemnat decât în munca omului de ştiinţă. În optica omului de ştiinţă, capătă prioritate metodele de lucru, de analiză şi interpretare a faptelor, articulaţiile demersului cognitiv, strategiile de gândire, pe scurt, ceea ce ţine de paradigma cercetării, de componenta metacognitivă a arhitecturii intelectuale.

Procesul de însuşire a cunoştinţelor duce la cristalizarea continuă a unor instrumente mintale: noţiuni, operaţii, scheme de gândire şi deprinderi de lucru, care constituie mecanisme de achiziţie pentru noile date şi informaţii. Prin acumulări progresive, aceste instrumente mintale dau formă concretă inteligenţei însăşi. Orice act de însuşire a cunoştinţelor presupun ca premisă - pe lângă prezenţa unor noţiuni-ancoră - un nivel corespunzător al gândirii şi duce, la rându-i, la crearea unor noi premise - condiţii interne pentru însuşirea altor cunoştinţe.

O eficienţă particulară prezintă forma euristică de instruire, care nu se mărgineşte să transmită, pur şi simplu, cunoştinţe, să le ofere „de a gata”, ca un repertoriu de concluzii.

Experienţa şcolară atestă ideea că a dezvolta gândirea independentă a elevilor înseamnă a pune în faţa lor sarcini cognitive, probleme care pot fi rezolvate prin metode obişnuite, luate de-a gata, furnizându-le în acelaşi timp materialul minim necesar şi îndrumându-i cu anumite procedee de gândire logică.

Îmbogăţirea şi sistematizarea cunoştinţelor, paralel cu dezvoltarea operaţiilor logice, imprimă o mobilitate tot mai accentuată gândirii elevilor.

Revista Virtuala Info MateTehnic ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

SCHIMB INFORMAŢIONAL

Prof. Diţuleasa Mircea Florian– - Liceul tehnologic „DACIA” Piteşti

O relaţie de comunicare autentică este o interacţiune care funcţionează în conformitate cu principiile acţiunii şi retroacţiunii. Rolul de vehicul în crearea şi dezvoltarea acestui circuit revine „informaţiei" care este dublu codificată: cognitiv şi afectiv. Cea din prima categorie asigură schimbul informaţional privind circulaţia ideilor, a structurilor cognitive şi a procedurilor, pe când cea de-a doua favorizează schimbul interpersonal privind circulaţia stărilor afectiv-emoţionale şi a atitudinilor.

Prin conştientizarea acestor diferenţe profesorul dobândeşte un anumit control asupra respectivelor comportamente pe care le manipulează strategic dirijând intelectiv factorii emoţionali sau modulând emoţional pe cei intelectuali. Instrumentele cu ajutorul cărora se realizează aceste procese sunt: discursul informativ şi vorbirea persuasivă.

Discursul informativ este maniera în care profesorul îşi organizează intervenţia lui ca specialist într-un anumit domeniu al cunoaşterii. Accentul se pune pe procesul formării şi dezvoltării structurilor intelectului, capabile să stimuleze diverse tipuri de procese: analitice, empirice, evaluative. (Davitz, R. Joel; Bell Samuel, Psihologia procesului educaţional. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978). Asemenea procese nu operează cu informaţiile pure, ci angajează mijloacele vorbirii persuasive pentru a impune adevărul, claritatea, utilitatea lor. Praxiologia comunicaţională recomandă profesorului să accesibilizeze înţelesurile, să recurgă la „traduceri" ale conţinuturilor şcolare pe care să le transpună în codul comportamental al elevilor de diferite vârste, evitând simplificarea excesivă care, uneori, afectează însuşi adevărul ştiinţific.

Vorbirea persuasivă dispune de intenţionalităţi informative, dar se concentrează pe creşterea receptivităţii interlocutorului faţă de mesaj. Ea este adesea definită drept arta de a te adresa cuiva cu convingere. Capacitatea de a convinge (sau forţa persuasivă) intră în categoria comportamentelor definitorii pentru aptitudinea pedagogică. Impactul persuasiv decisiv este produs de personalitatea educatorului atunci când el poate releva elevilor: competenţa şi abilităţile sale profesionale, caracterul,charisma. Discursul persuasiv se caracterizează prin: claritate, vivacitate, adecvare,

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

adresativitate, forţă, expresivitate, ritm, intensitate, puritate, reglabilitate. Prin astfel de mijloace, profesorul reuşeşte să stabilească cu elevii o relaţie care nu riscă să cadă în niciuna dintre extreme (excesul de autoritate sau de familiaritate), oricare fiind dăunătoare. Dimpotrivă, distanţarea permite profesorului să-şi menţină o stare de disponibilitate faţă de fiecare elev, în timp ce apropierea îl asigură pentru a înţelege empatic doleanţele şi trăirile elevilor (Gilles Ferry, în Ezechil L., Comunicarea educaţională în context şcolar, EDP, Bucureşti, 2002).

Trecerea de la contactul interpersonal la schimbul informaţional şi interpersonal ţine de dinamica procesului comunicaţional care generează, complementarizează şi multiplică cele două ipostaze. Scopul fundamental al comunicării educaţionale îl constituie influenţa comportamentală, adică proiectarea deliberată a modalităţilor prin intermediul cărora elevii îşi modifică comportamentul iniţial ca efect al receptării şi prelucrării unui anumit material informaţional. Asemenea tipuri de rezultate se pot obţine numai printr-o implicare a partenerilor în jurul intenţiei atingerii scopurilor şi a dorinţei de schimbare unanim acceptate. Profesorul este cel care, în calitate de conducător şi coordonator al procesului didactic, poate declanşa, stimula şi întreţine acest motor al interacţiunii. „Când profesorul nu manifestă un spirit angajat şi atitudinea elevilor devine indiferentă" (Ziemowitz Wlodarscki)

Dificultăţile sunt generate de faptul că efectul numit generic implicare este complex şi apare ca produs al acţiunii mai multor variabile complexe: situaţia de moment, dinamica relaţională, maturitatea persoanelor angajate în procesul interacţiunii. La nivelul oricăreia dintre aceste condiţii pot fi identificate date comportamentale cu rol hotărâtor în cadrul procesului de implicare: atitudinea comunicativă, efortul persuasiv, capacitatea empatică, abilitatea de a motiva interlocutorul.

Astfel de manifestări sunt deosebit de semnificative mai ales într-o relaţie directă, de tip „faţă în faţă" unde resursele explicite de care dispun interlocutorii pentru a comunica sunt multiplicate de cele neexplicite, adiacente, subînţelese.

Efectul acţiunii de a motiva este foarte favorabil proceselor de comunicare: ea deschide canalele care permit circulaţia liberă a mesajelor de la un interlocutor la celălalt. După Albert Moyne a motiva înseamnă „să faci să circule ideile acolo unde domneşte sărăcia şi lipsa de inspiraţie, înseamnă a debloca într-o fiinţă ca şi într-o instituţie ceea ce este blocat, arătând şi făcând un experiment care să releve că ceva nou este posibil". (Albert Moyne, Motiver... les enseignants, în: Cahiers pedagogiques, nr. 300/1992, pg. 24) Raoul Pantanella atrage atenţia asupra motivaţiilor celui ce motivează, considerând că nu doar elevii resimt această trebuinţă, ci şi profesorul. Motivant-motivat - spune autorul francez -

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

este un joc în oglindă sau „un cerc vicios care tinde să devină virtuos" (în Roland Viau, La motivation - condition essentielle de reussite, în: Science Humaine nr. 12/1996).

Locul unde se desfăşoară acţiunea se manifestă ca un adevărat câmp psihosocial capabil să genereze energiile cu efect motivator.

Importanţa relaţiei profesor –elev în educaţie

Prof. Lucreţia Poştoacă - Şcoala gimnaziala"Traian" Piteşti

Scopul principal al şcolii este acela de a forma la elevi *o cultură comunicaţională* care să faciliteze transferul de la *comunicarea în spaţiul şcolar, la comunicarea în societate*. Având în vedere că relaţiile interpersonale se bazează pe comunicare, iar aceasta, la rândul ei, le influenţează pozitiv sau negativ, profesorul trebuie să găsească multiple moduri de a facilita şi dirija comportamentul comunicativ al elevilor. Comunicarea este unul dintre elementele care definesc întregul proces de organizare şi desfăşurare a procesului instructiv-educativ. Formarea şi dezvoltarea competenţelor de comunicare vor fi utile atât în situaţii de comunicare socială concretă, cât şi în demersurile didactice. Modul în care aceste competenţe sunt însuşite şi dezvoltate depind inclusiv de mediul şi condiţiile psiho-sociale ale şcolii şi clasei, de relaţiile care se stabilesc între elev şi dascăl în cadrul activităţilor didactice.

Comunicarea educaţională sau pedagogică este cea care favorizează realizarea fenomenului educaţional; comunicarea didactică apare ca formă particulară a acesteia, cu rol important în procesul de predare-asimilare a cunoştinţelor. În actul didactic, comunicarea devine o realitate socială complexă în care se regăsesc doi parteneri cu roluri şi cu statusuri bine definite: cadrul didactic şi elevul.

Învăţarea este principala activitate în care comunicarea capătă un rol esenţial; elevul este pus în situaţia de a relaţiona cu profesorul şi cu colegii de clasă, de a se afla în poziţia celui care ascultă sau a celui care face o comunicare. Între profesor şi elev, pe de o parte, şi între elev şi colegii săi, pe de altă parte, se va dezvolta o relaţie utilă în procesul de predare-învăţare.

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Cadrul didactic trebuie să caute şi să găsească cele mai potrivite tehnici şi mijloace prin care să dezvolte la elevii săi competenţe comunicative. Pentru aceasta este nevoie ca orice profesor să posede cunoştinţe pe care să le transmită elevilor, astfel încât aceştia să îşi formeze capacităţi comunicative specifice vârstei şcolare. În orice situaţie didactică, cadrul didactic va urmări să folosească un stil comunicaţional potrivit situaţiei respective, dar şi particularităţilor de vârstă şi individuale ale elevilor; tipul şi structura comunicării didactice vor fi astfel stabilite încât să se realizeze situaţii de comunicare dascăl-elev, elev-dascăl şi elev-elev, iar competenţele comunicative ale elevilor să fie dezvoltate şi puse în valoare.

Elevul devine parte a actului comunicării atunci când informaţia pe care o primeşte aduce ceva nou şi relevant pentru el; într-o astfel de situaţie, elevul va găsi motivaţie pentru a-şi concentra atenţia în timpul orei şi pentru a-şi folosi în mod deplin capacităţile intelectuale, afective, voliţionale şi atitudinale necesare în procesul didactic. Clasa de elevi funcţionează ca un spaţiu în care relaţiile de comunicare sunt principala formă de interacţiune inter-individuală şi autocunoaştere, de dezvoltare a sociabilităţii copiilor de vârstă şcolară. Prin metodele folosite, prin scopurile şi perspectivele propuse, prin activităţile şcolare şi extraşcolare desfăşurate, dascălul influenţează coeziunea colectivului clasei şi competenţele comunicative ale fiecărui elev în parte.

La începutul activităţilor de grup sunt utile aşa numitele exerciţii de spargere a gheţii. Sub această denumire se găsesc mai multe tehnici care au ca scop principal depăşirea barierelor de comunicare în vederea eliminării emoţiilor şi a asumării de rol pe parcursul desfăşurării activităţilor propuse; toţi membrii echipei vor acţiona cu o mai mare libertate de exprimare pentru realizarea unor experienţe unitare. Exerciţiile propuse pot fi diverse: relatarea unei situaţii hazlii, o poveste sau un text citit de cadrul didactic, lectura unei creaţii care aparţine unui elev, relatarea unor evenimente trăite recent de unul dintre participanţii la actul didactic, un proverb, „lectura” unei imagini sugestive, ghicitori alese în funcţie de tema lecţiei, un rebus prin rezolvarea căruia se face o recapitulare a cunoştinţelor dobândite pe parcursul ultimelor ore şi totodată legătura cu noţiunile din lecţia de zi, un joc etc.

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Practica didactică a dovedit utilitatea aplicării unor astfel de practici căci sunt valorificate într-o mai mare măsură creativitatea şi spontaneitatea tuturor celor implicaţi în actul didactic a cărui eficientizare creşte. Exerciţiile de spargere a gheţii îi fac pe participanţii la o anumită activitate să se simtă mai în largul lor şi să o înceapă într-o notă pozitivă. Elevii au nevoie să relaţioneze unii cu alţii, iar pentru aceasta există mai multe modalităţi pe lângă prezentările oficiale şi de organizaţie/funcţie. Un astfel de exerciţiu este folositor pentru că stabileşte atmosfera care se potriveşte cel mai bine cu atelierul/evenimentul desfăşurat; acesta nu trebuie să se îndepărteze prea mult de „spaţiul vital" al participanţilor implicaţi în procesul de învăţare.

Tehnicile de spargere a gheţii permit formarea de echipe care vor coopera pe parcursul desfăşurării activităţilor didactice. Echipele astfel formate vor urmări un scop comun, vor manifesta coeziune şi vor comunica mai eficient deoarece membrii lor vor avea motivaţii şi interese comune sau cel puţin apropiate. O echipă va deveni performantă atunci când membrii ei vor avea strategii clare şi bine formulate, relaţiile din cadrul grupului vor fi deschise, active şi empatice iar încrederea reciprocă se va manifesta în orice împrejurare; o bună comunicare între membrii unui grup va aduce performanţe superioare pentru că elevii îţi vor pune în valoare creativitatea şi flexibilitatea; performanţele obţinute în cadrul grupului vor avea drept consecinţă un moral ridicat, satisfacţii profesionale şi vor atrage recunoaşterea şi aprecierea celorlalţi.

Bibliografie

- Cerghit, I. (1988), Mijloace de învăţământ şi strategii didactice în Curs de pedagogie,

Editura Universităţii Bucureşti

-Cerghit, I., Neacşu, I., Negreţ-Dobridor, I., Pânişoară, I.-O. (2001), Prelegeri

pedagogice, Iaşi, Editura Polirom

Revista Virtuala Info MateTehnic ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

CONTRIBUŢII ALE SOFTULUI EDUCAŢIONAL ÎN PREDAREA MATEMATICII LA CLASELE I – IV

Înv. Purdel Carmen
Şcoala Gimnaziala Nr. 1 Găgeşti

„Orice modalitate uniformă de predare este evident, nesatisfăcătoare, de vreme ce fiecare elev este atât de diferit.”
Howard Gardner

SOFTURILE EDUCAŢIONALE PENTRU ELEVII CU DIFICULTĂŢI ÎN ÎNVĂŢAREA MATEMATICII

Softul educaţional este un program proiectat pentru a fi folosit în procesul de predare – învăţare – evaluare, fiind un mijloc de instruire interactiv, care oferă posibilitate de individualizare. Este realizat în funcţie de anumite cerinţe pedagogice (conţinut specific, caracteristici ale grupului ţintă, obiective comportamentale şi anumite cerinţe tehnice : asigurarea unei interacţiuni individualizate, a feedback-ului secvenţial şi a evaluării formative).

Calitatea unui soft educaţional este dată de gradul de interacţiune cu utilizatorul (elevul) - de aceasta depinde măsura în care se produce învăţarea – şi de flexibilitatea programului care presupune individualizarea parcursului în funcţie de reacţiile elevului.

Bazându-se pe caracterul atractiv şi antrenant al jocului didactic, îl putem folosi cu succes la scoaterea din impas a elevilor ce înregistrează rezultate mai slabe la învăţătură. Softurile educaţionale acţionează favorabil asupra acestora, crescându-le performanţele, căpătând încredere în capacităţile lor, siguranţă şi promptitudine în răspunsuri, deblocând astfel potenţialul creator al acestora. Dacă softul educaţional a fost ales cu discernământ şi este accesibil grupei de elevi pe care o vizăm, succesul este garantat.

Nu se pledează pentru renunţarea la metodele învăţământului tradiţional, mai ales în cazul primilor ani de educaţie în şcoli, când influenţa personală a educatorului rămâne determinantă, totuşi utilizarea tehnologiilor moderne, a softurilor educaţionale reprezintă o necesitate a procesului educativ la particularităţile individuale ale fiecărui elev, care trebuie confirmate.

Mă voi referi în continuare la modul în care am folosit softul educaţional matematic în cadrul lecţiilor de matematică pentru a-i ajuta pe elevii care au rezultate mai slabe la această disciplină.

În cadrul lecţiei am alternat activitatea frontală cu munca independentă, metodele tradiţionale cu metoda IAC (instruirea asistată de calculator), având astfel posibilitatea de a îndruma şi dirija activitatea elevilor care presupun acest ajutor.

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Astfel, după activitatea comună cu întreaga clasă, obişnuită în orice lecţie, elevii cei mai buni efectuează independent o temă în timp ce organizez cu elevii mai slabi la învăţătură exerciţii sub formă de joc care se vor desfăşura cu ajutorul calculatorului.

În continuare voi prezenta 2 softuri educaţionale care au un rol foarte important în predarea matematicii la clasele I – IV, fiind utilizate în special de către elevii care întâmpină unele dificultăţi în învăţarea matematicii. În acest caz, calculatorul, softurile educaţionale şi jocurile online au menirea de a capta atenţia elevilor şi de a-i motiva şi îndruma în rezolvarea sarcinilor într-un mod gradat.

Un exemplu de soft de tip tutorial pe care l-am folosit pentru elevii care întâmpină dificultăţi în învăţarea matematicii la clasele primare este jocul ***„Matematica interactivă”*** . Programul cuprinde mai multe jocuri (lecţii) şi pe tot parcursul lecţiei, elevii sunt ghidaţi de o voce prietenoasă. Rezolvările sunt facile, alegerile realizându-se cu un simplu click. Alegerile corecte sau cele incorecte sunt însoţite de mesaje de încurajare sau de felicitare **(Bravo ! Ai reuşit ! ; Ai greşit ! Mai încearcă !)**

Un exemplu concludent este jocul interactiv ***„Adunări şi scăderi fără treceri peste ordin”, clasa I.***

Acest joc solicită elevul să rezolve corect operaţiile de pe drum pentru a ajunge la castel. În acelaşi timp elevul rezolvă oral exerciţiile de adunare şi scădere , dar utilizează şi calculatorul pentru a completa răspunsurile corecte.

Un alt joc educativ care se rezolvă cu ajutorul calculatorului este ***„Haideţi să facem o faptă bună !”.*** Acest joc îi invită pe elevii clasei a II-a să o ajute pe Scufiţa Roşie să ajungă la casa bunicuţei, fără să se întâlnească cu lupul. Pentru asta trebuie să rezolve corect toate exerciţiile. Elevii vor alege răspunsul corect pentru rezultatul exerciţiilor sau pentru termenul necunoscut cu un singur click, având la dispoziţie 3 variante. Prin acest joc elevii cu dificultăţi în învăţarea matematicii recapitulează cunoştinţele dobândite in clasa I.

Revista Virtuala Info MateTehnic ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

Softurile de tip tutorial sunt mai potrivite pentru şcolarii mici, în timp ce softurile investigative sunt recomandate mai ales elevilor mai mari. Avantajul utilizării softurilor tutoriale la elevii mici este acela că întregul demers este perceput ca un joc, activitatea de învăţare este foarte atractivă. Să ne imaginăm cu câtă „plăcere” rezolvă elevii de clasa I, de exemplu coloane întregi de adunări şi scăderi pe caiet sau la tablă, în comparaţie cu exersarea adunării şi scăderii prin intermediul unui joc la calculator, cu o grafică atractivă şi cu un prieten care îi însoţeşte la fiecare pas.

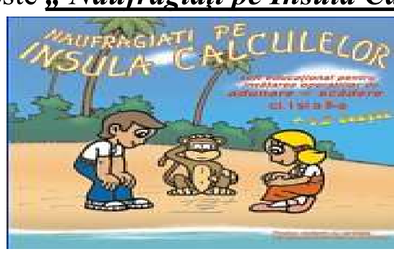
Experienţa didactică m-a determinat să ajung la concluzia că softul educaţional matematic organizat şi desfăşurat metodic cu ajutorul calculatorului constituie un mijloc eficient de recuperare a elevilor rămaşi în urmă la învăţătură.

SOFTURILE EDUCAŢIONALE MATEMATICE PENTRU ELEVII DOTAŢI

Fiind obiect de bază în clasele primare, matematica ne ajută să descoperim elevii dotaţi şi sârguincioşi care lucrează cu plăcere pentru a înregistra cât mai multe succese la învăţătură. Noi, învăţătorii, trebuie să fim foarte receptivi pentru a-i descoperi pe aceşti elevi şi a-i ajuta să-şi dezvolte aptitudinile matematice.

Atât pentru elevii dotaţi, dar şi pentru cei care şi-au exprimat liber dorinţa, am desfăşurat de-a lungul anilor activităţi matematice în cabinetul de informatică, utilizând ca demers didactic diferite softuri educaţionale şi jocuri online.

Un soft educaţional pe care l-am folosit pentru învăţarea matematicii de către elevii dotaţi este ***„ Naufragiaţi pe Insula Calculelor***” .



Softul educaţional „Naufragiaţi pe Insula Calculelor” a fost elaborat de o echipă de psihologi, metodişti şi programatori cu experienţă de la Facultatea de Psihologie şi Ştiinţe ale Educaţiei a Universităţii "Babeş-Bolyai" din Cluj-Napoca şi de la Asociaţia de Ştiinţe Cognitive din România. Acest soft se bazează pe cercetările actuale din psihologia dezvoltării, pe cele mai noi teorii despre învăţare, pe facilităţile designului multimedia de înaltă calitate şi pe consultări

 ISSN 2069-7988
ISSN-L 2069-7988

repetate cu învăţători de mare prestigiu. Softul realizează ceea ce un învăţător expert face la clasă, pentru a-şi ajuta elevii să înveţe matematica. Programul elaborat accelerează învăţarea şi consolidarea operaţiilor de adunare şi de scădere la elevii din clasele I şi a II-a. Exerciţiile propuse respectă prevederile actualului curriculum şcolar, au un conţinut variat şi atractiv. Softul poate fi util şi elevilor din clasele primare mai mari, îndeosebi celor din clasele a III-a, datorită complexităţii unora dintre exerciţii.

Rezolvarea exerciţiilor propuse în acest soft, bazate pe programa şcolară, contribuie la îmbunătăţirea performanţei şcolare a elevilor care îl utilizează.

Din studiile întreprinse s-au desprins o serie de concluzii interesante cu privire la eficienţa utilizării software- ului educaţional, dintre care amintesc :

1) ***Avantajele utilizării calculatorului în comparaţie cu alte metode ;***
2) ***Reducerea timpului de studiu ;***
3) ***Atitudinea faţă de computer se modifică pozitiv ;***
4) ***Utilizarea computerelor este mai eficientă în predarea matematicii, decât în domeniul altor discipline ;***
5) ***În instruirea asistată de calculator exersarea este eficientă în formarea deprinderilor elementare, în timp ce sistemele tutoriale sunt mai eficiente în formarea deprinderilor intelectuale de nivel superior ;***
6) ***Instruirea asistată de calculator este mai eficientă ca instruire complementară, decât ca formă alternativă ;***
7) ***Elevii care învaţă încet şi cei rămaşi în urmă câştigă mai mult decât elevii foarte buni ;***
8) ***Strategiile bazate pe utilizarea calculatorului sunt mai eficiente la nivelurile inferioare.***

Calculatoarele îi atrag pe elevi, nu numai prin faptul că reprezintă un domeniu nou, din acest punct de vedere, munca învăţătorului este uşurată. În acelaşi timp, responsabilitatea este mult mai crescută, pentru că a nu reuşi să atragi elevul spre disciplina pe care o predai este mai puţin grav decât „ a-l pierde” undeva pe drum. Rolul învăţătorului este, aşadar, acela de a-i face pe elevi să nu îşi piardă interesul pentru disciplina pe care o predă şi, mai mult, să îi motiveze, să îşi lărgească sfera de cunoaştere în acest domeniu.